

2. Stationäre Wärmeleitung

Von stationärer Wärmeleitung spricht man, falls sich die Temperaturen nur mit dem Ort, jedoch nicht mit der Zeit ändern. Der Wärmestrom ist dann bezüglich Ort und Zeit konstant ($\dot{Q} = \text{konstant}$). Die Wärmestromdichte kann dagegen ortsabhängig sein.

2.1 Wärmeleitung durch einschichtige Wände

Im Folgenden wird die Wärmeleitung in einer einschichtigen Wand betrachtet, die entsprechend Bild 2-1 als Platte, Hohlzylinder oder Hohlkugel ausgebildet sein kann. Dargestellt ist der Fall, dass Wärme von innen nach außen geleitet wird. Die Körper haben die Dicke s bzw. $r_a - r_i$. Die Oberflächentemperaturen seien jeweils mit T_a (außen) und T_i (innen) vorgegeben. Für den Wärmestrom gilt

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot A. \quad (2-1)$$

Die Randbedingungen sind dann

$$\begin{aligned} T(x = s) &= T_a & \text{bzw.} & \quad T(r = r_a) = T_a & \quad \text{und} \\ T(x = 0) &= T_i & \text{bzw.} & \quad T(r = r_i) = T_i. \end{aligned}$$

Für den Wärmestrom ergibt sich damit

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_a - T_i}{s} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T - T_i}{x}. \quad (2-2)$$

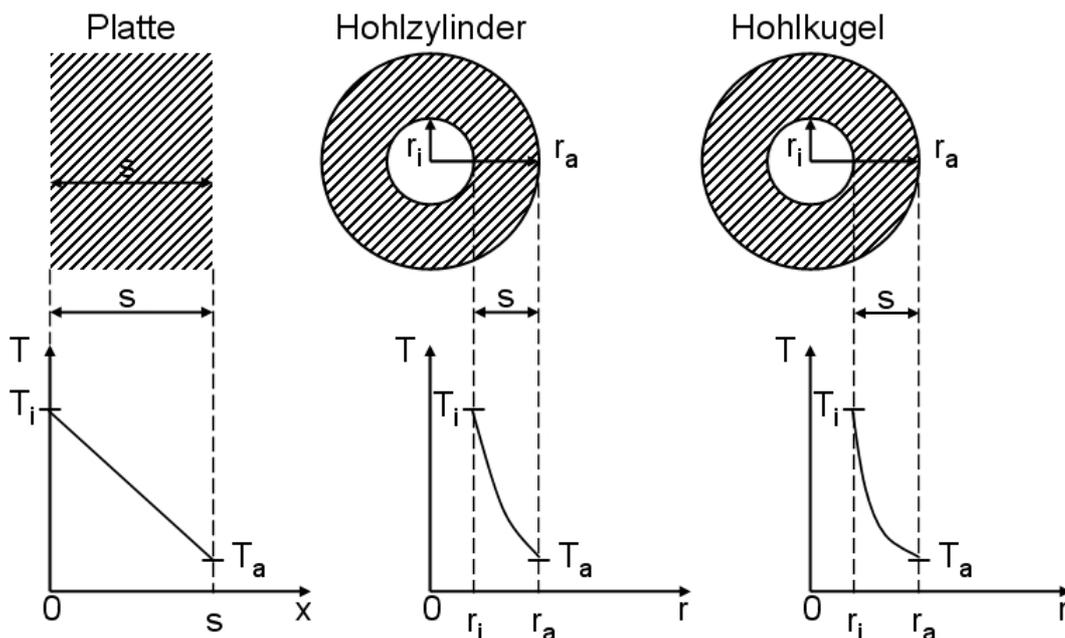


Bild 2-1: Stationärer Temperaturverlauf in einer Platte, einem Hohlzylinder und einer Hohlkugel

Beim Rohr und bei der Hohlkugel hängt die Fläche vom Radius ab, so dass für den Wärmestrom gilt

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} A(r). \quad (2-3)$$

Die Flächen betragen beim Rohr (Länge L)

$$A(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (2-4)$$

und bei der Hohlkugel

$$A(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2. \quad (2-5)$$

Damit erhält man aus der Integration

$$-\frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} = \frac{T_a - T_i}{\ln r_a / r_i} = \frac{T - T_i}{\ln r / r_i} \quad (2-6)$$

bzw.

$$\frac{\dot{Q}}{2 \cdot 4 \cdot \pi} = \frac{T_a - T_i}{1/r_a - 1/r_i} = \frac{T - T_i}{1/r - 1/r_i}. \quad (2-7)$$

Damit ergeben sich für die Temperaturverläufe die folgenden Gleichungen

$$\frac{T - T_i}{T_a - T_i} = \frac{x}{s} \quad (\text{Platte}), \quad (2-8)$$

$$\frac{T - T_i}{T_a - T_i} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (\text{Hohlzylinder}), \quad (2-9)$$

$$\frac{T - T_i}{T_a - T_i} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}} \quad (\text{Hohlkugel}). \quad (2-10)$$

Bei der Platte ist somit der Temperaturverlauf linear, beim Rohr proportional $\ln r$ und bei der Hohlkugel proportional $1/r$.

Aus dem FOURIERSchen Ansatz

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

erhält man als Wärmestromdichte mit den Temperaturgradienten aus den Gleichungen (2-8) bis (2-10)

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{s} \cdot (T_i - T_a) \quad (\text{Platte}), \quad (2-11)$$

$$\dot{q}(r) = \frac{\lambda}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \cdot \frac{1}{r} \cdot (T_i - T_a) \quad (\text{Hohlzylinder}), \quad (2-12)$$

$$\dot{q}(r) = \frac{\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (T_i - T_a) \quad (\text{Hohlkugel}). \quad (2-13)$$

Aus den Gleichungen (2-2), (2-6) und (2-9) ergibt sich somit für die Wärmeströme

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot (T_i - T_a) \cdot A \quad (\text{Platte}), \quad (2-14)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \cdot (T_i - T_a) \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \quad (\text{Hohlzylinder}), \quad (2-15)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} \cdot (T_i - T_a) \cdot 4 \cdot \pi \quad (\text{Hohlkugel}). \quad (2-16)$$

Häufig kann man zur Berechnung des Wärmestroms durch Rohrwände anstatt der komplizierteren Hohlzylindergleichung (2-15) die handlichere Gleichung (2-14) für die Platte verwenden. In diese muss dann die Dicke $s = r_a - r_i$ und die mittlere Fläche des

Holzylinders $A_m = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_a + r_i}{2} \cdot L$ eingesetzt werden. Das Verhältnis

$$\varphi = \frac{\dot{Q}_z}{\dot{Q}_p} \quad (2-17)$$

gibt den Fehler an, der auftritt, wenn man statt des Wärmestroms \dot{Q}_z für den Zylinder näherungsweise den Wärmestrom \dot{Q}_p für die Platte berechnet. Aus den Gleichungen (2-14) und (2-15) erhält man somit

$$\varphi = \frac{2}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \cdot \frac{\frac{r_a}{r_i} - 1}{\frac{r_a}{r_i} + 1}. \quad (2-18)$$

Dieser Korrekturfaktor, mit dem der Wärmestrom \dot{Q}_p multipliziert werden muss, um den erwähnten Fehler auszugleichen, hängt also nur vom Radienverhältnis r_a/r_i des Hohlzylinders ab. Im Bild 2-2 ist diese Abhängigkeit dargestellt. Man erkennt, dass der Korrekturfaktor φ bei den in der Praxis üblichen Radienverhältnissen nur geringfügig von 1 abweicht.

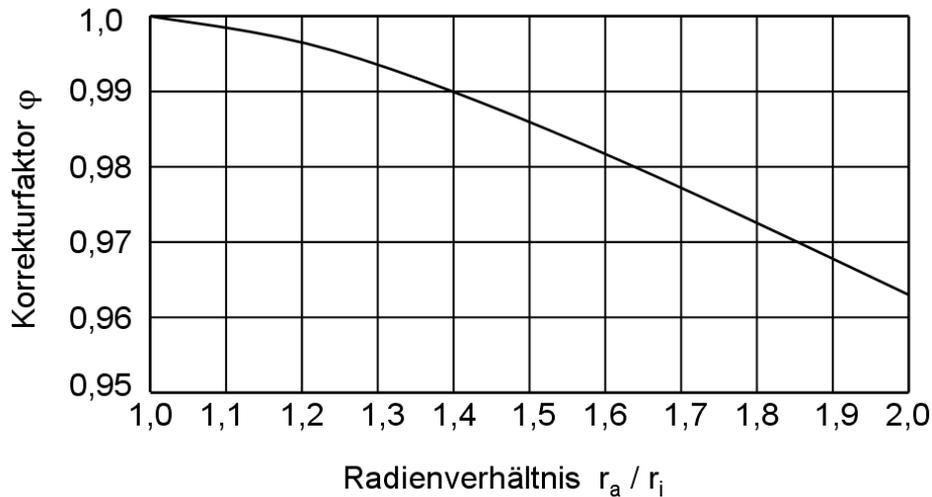


Bild 2-2: Korrekturfaktor φ zur Berücksichtigung der Krümmung einer Hohlzylinderwand

Im Allgemeinen ist $r_a/r_i < 1,3$, so dass sich die Wärmeströme um weniger als 0,5 % unterscheiden. In vielen Fällen, und zwar insbesondere bei „dünnwandigen“ Hohlzylindern (z. B. Rohre), wird man deshalb auf diese Korrektur verzichten und zur Berechnung des Wärmestroms durch die Rohrwand die einfachere Formel (2-14) für die Wärmeleitung durch Platten heranziehen, wobei als Wärmeübertragungsfläche die mittlere Hohlzylinderfläche A_m einzusetzen ist.

2.2 Wärmedurchgang bei einschichtigen Wänden

In den meisten Fällen sind nicht die Oberflächentemperaturen T_i und T_a , sondern die Umgebungstemperaturen $T_{u,i}$ und $T_{u,a}$ bekannt. Wird Wärme von einem Medium auf ein anderes übertragen, die beide durch eine Wand voneinander getrennt sind, so muss die Wärme zuerst von dem Medium mit der höheren Temperatur (konvektiv) an die Wand übertragen, durch die Wand zur gegenüberliegenden Seite geleitet und von dort wieder (konvektiv) an das andere Medium abgegeben werden. Diesen gekoppelten Mechanismus aus Konvektion und Leitung bezeichnet man als „Wärmedurchgang“. Der sich dabei einstellende Temperaturverlauf ist qualitativ in Bild 2-3 dargestellt.

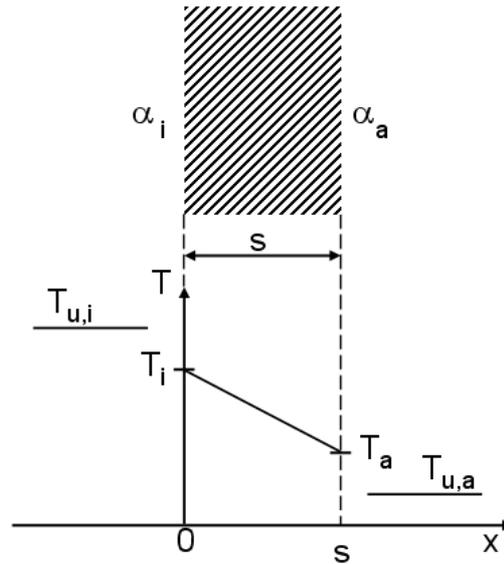


Bild 2-3: Temperaturverlauf beim Wärmedurchgang durch eine einschichtige ebene Wand

Da beim stationären Wärmedurchgang der Wärmestrom \dot{Q} sich nicht mit dem Ort ändert, erhält man für die einschichtige Wand die drei Gleichungen

$$\dot{Q} = \alpha_i \cdot A \cdot (T_{u,i} - T_i), \quad (2-19)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (T_i - T_a), \quad (2-20)$$

$$\dot{Q} = \alpha_a \cdot A \cdot (T_a - T_{u,a}), \quad (2-21)$$

zur Bestimmung der beiden unbekanntenen Oberflächentemperaturen und des gesuchten Wärmestroms. Eliminiert man die Oberflächentemperaturen, ergibt sich für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot (T_{u,i} - T_{u,a}), \quad (2-22)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \quad (\text{Platte}). \quad (2-23)$$

Für Hohlzylinder und Hohlkugel geht man entsprechend vor, indem man in den Gleichungen (2-19) und (2-21) die jeweiligen Flächen (innen und außen) nach den Gleichungen (2-4), (2-5) und für Gleichung (2-20) die passende Gleichung für die gekrümmten Wände einsetzt. Als Wärmedurchgangskoeffizient erhält man dann

$$k = \frac{1}{\frac{1}{r_i \cdot \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{r_a \cdot \alpha_a}} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{Hohlzylinder}), \quad (2-24)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{r_i^2 \cdot \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) + \frac{1}{r_a^2 \cdot \alpha_a}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (\text{Hohlkugel}). \quad (2-25)$$

Die Ortsabhängigkeit kürzt sich im Produkt $k \cdot A$ für den Wärmestrom heraus. Ist auf einer der beiden Körperseiten anstatt der Umgebungs- die Oberflächentemperatur gegeben, so können also die oben hergeleiteten Formel (2-23) bis (2-25) für den Wärmedurchgangskoeffizienten weiter verwendet werden, indem man den entsprechenden Wärmeübergangskoeffizienten unendlich setzt.

2.3 Wärmedurchgang bei mehrschichtigen Wänden

Wände von Apparaten, Reaktoren, Industrieöfen, Rohleitungen usw. sind häufig als mehrschichtige Wände ausgebildet. Eine Schicht bestimmt die Festigkeit (z. B. Metallwand bei Rohren, Steinwand bei Gebäuden), eine andere Schicht dient als Isolierung. Sie bestehen im Allgemeinen aus mehreren Schichten unterschiedlicher Dicke und Wärmeleiteigenschaften. Im Bild 2-4 ist beispielhaft für eine dreischichtige ebene Wand der Temperaturverlauf angegeben.

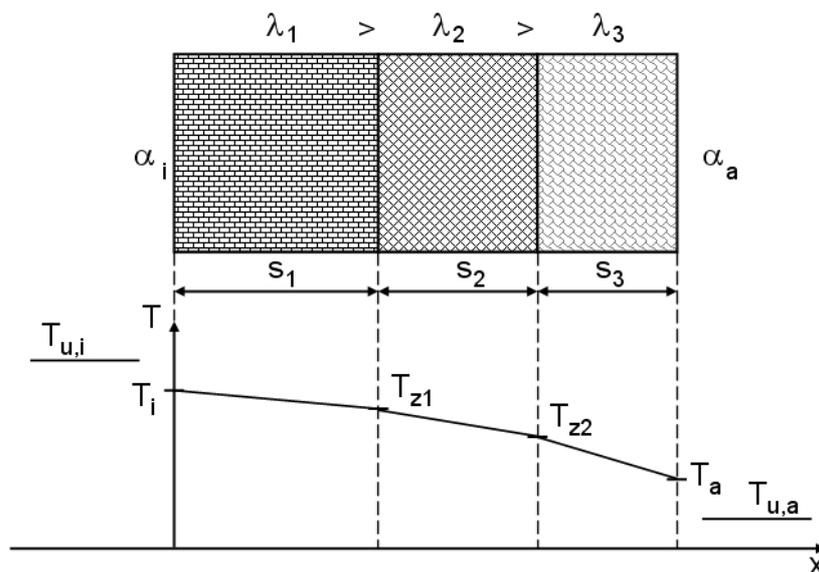


Bild 2-4: Schematischer Temperaturverlauf durch eine dreischichtige Wand

Bei stationärem Wärmedurchgang (also \dot{Q} konstant) durch eine mehrschichtige Platte (also A konstant) folgt aus dem FOURIERSchen Ansatz

$$-\lambda_1 \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_1 = -\lambda_2 \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_2 = -\lambda_3 \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_3. \quad (2-26)$$

Aufgrund der unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten müssen sich also an den Berührungsf lächen die Temperaturgradienten sprunghaft ändern, d. h. die Temperaturverläufe haben dort einen Knick. Für die benachbarten Schichten 1 und 2 erhält man beispielsweise

$$\frac{\frac{dT}{dx}\big|_1}{\frac{dT}{dx}\big|_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (2-27)$$

Das Verhältnis der Temperaturgradienten ist also reziprok zum Verhältnis der zugehörigen Wärmeleitkoeffizienten.

Zur Berechnung der Wärmeströme für die Geometrien Platte, Hohlzylinder und Hohlkugel mit N Schichten geht man ebenso vor wie im vorherigen Abschnitt. Für jede zusätzlich Schicht erhält man eine Gleichung für die Wärmeleitung durch diese Schicht in der Form von Gleichung (2-20) zur Bestimmung der Zwischenwandtemperaturen T_{z1}, T_{z2}, \dots (vgl. Bild 2-4). Als Wärmedurchgangskoeffizienten ergeben sich dann

- für die mehrschichtige Platte

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\alpha_a}}, \quad (2-28)$$

- für den mehrschichtigen Hohlzylinder

$$k = \frac{1}{\frac{1}{r_i \cdot \alpha_i} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \cdot \ln \frac{r_{a,j}}{r_{i,j}} + \frac{1}{r_a \cdot \alpha_a}} \cdot \frac{1}{r}, \quad (2-29)$$

- für die mehrschichtige Hohlkugel

$$k = \frac{1}{\frac{1}{r_i^2 \cdot \alpha_i} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \cdot \left(\frac{1}{r_{i,j}} - \frac{1}{r_{a,j}} \right) + \frac{1}{r_a^2 \cdot \alpha_a}} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (2-30)$$

Damit sind die Wärmeströme wiederum nach Gleichung (2-22) mit den Flächen gemäß Gleichung (2-4) oder (2-5) bestimmbar. Die Temperaturen an den Berührungs- und den Oberflächen erhält man, indem zunächst der Wärmestrom und dann nacheinander die gesuchten Temperaturen aus dem Newtonschen Ansatz und dem FOURIERSchen Ansatz für die jeweilige Schicht berechnet werden.

Will man auch beim mehrschichtigen Hohlzylinder den Wärmestrom mit den Gleichungen für die Platte bestimmen, so müssen die auftretenden Korrekturfaktoren für jede Schicht errechnet werden.

2.4 Wärmewiderstände

Wärmestrom und Temperaturdifferenz sind einander proportional. Bei einer einschichtigen Wand gilt

$$T_i - T_a = \dot{Q} \cdot \frac{s}{\lambda \cdot A} \quad (2-31)$$

Führt man analog zur Elektrotechnik mit

$$R_\lambda = \frac{s}{\lambda \cdot A} \quad (2-32)$$

einen Wärmeleitwiderstand ein, so erhält man die Beziehung

$$T_i - T_a = \dot{Q} \cdot R_\lambda, \quad (2-33)$$

Temperaturdifferenz = Wärmestrom x Wärmeleitwiderstand

d. h. formal den gleichen Zusammenhang wie beim OHMSchen Gesetz

$$\Delta U_{el} = I_{el} \cdot R_{el}, \quad (2-34)$$

Spannungsdifferenz = elektr. Strom x elektr. Widerstand.

In beiden Fällen spricht man von einer „Potenzialdifferenz“ (Temperaturdifferenz, Spannungsdifferenz) als treibender Kraft, welche dem „Strom“ (Wärmestrom, elektrischen Strom) proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist der den Strom hemmende Widerstand (Wärmewiderstand, elektrischer oder auch OHMScher Widerstand). Beide Vorgänge unterliegen also den gleichen mathematischen Gesetzmäßigkeiten, finden aber in verschiedenen physikalischen Systemen statt und sind damit, wie im Kapitel 1 erläutert, analog.

Berücksichtigt man in diesen Betrachtungen auch den Wärmeübergang zu beiden Seiten einer mehrschichtigen Wand, so erhält man aus den Gleichungen (2-22) und (2-28)

$$T_{u,i} - T_{u,a} = \dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{A \cdot \alpha_i} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{A \cdot \lambda_j} + \frac{1}{A \cdot \alpha_a} \right). \quad (2-35)$$

Die Ausdrücke in der Klammer

$$R_{a,i} = \frac{1}{A \cdot \alpha_i}, \quad R_{\alpha,a} = \frac{1}{A \cdot \alpha_a} \quad (2-36)$$

bedeuten die Übergangswiderstände zu beiden Seiten der Wand und

$$R_\lambda = \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{A \cdot \lambda_j} \quad (2-37)$$

den Wärmeleitwiderstand. Man erhält dann

$$T_{u,i} - T_{u,a} = \dot{Q} \cdot \Sigma R, \quad (2-38)$$

wobei

$$\Sigma R = R_{\alpha,i} + \Sigma R_{\lambda} + R_{\alpha,a} \quad (2-39)$$

und ΣR_{λ} der Wärmeleitwiderstand einer mehrschichtigen Wand ist. Widerstände beim Wärmeübergang können also ebenso addiert werden wie bei entsprechenden elektrischen Vorgängen.

Mit Hilfe von Wärmewiderständen lassen sich viele wärmetechnische Zusammenhänge sehr anschaulich darstellen. Dies wird an einem einfachen Beispiel, dem Wärmedurchgang durch eine Heizkörperwand mit Bild 2-5 dargestellt.

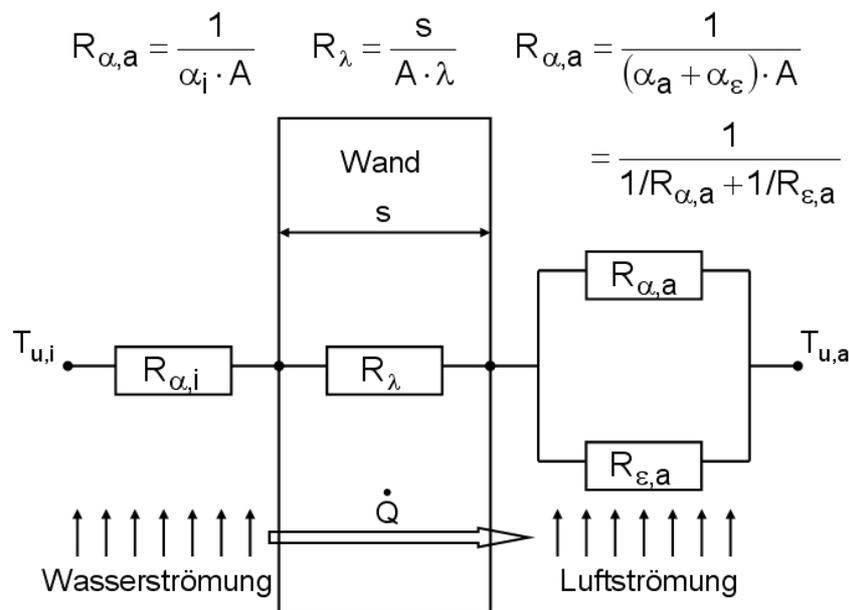


Bild 2-5: Ersatzschaltbild für den Wärmedurchgang durch die Wand eines Heizkörpers

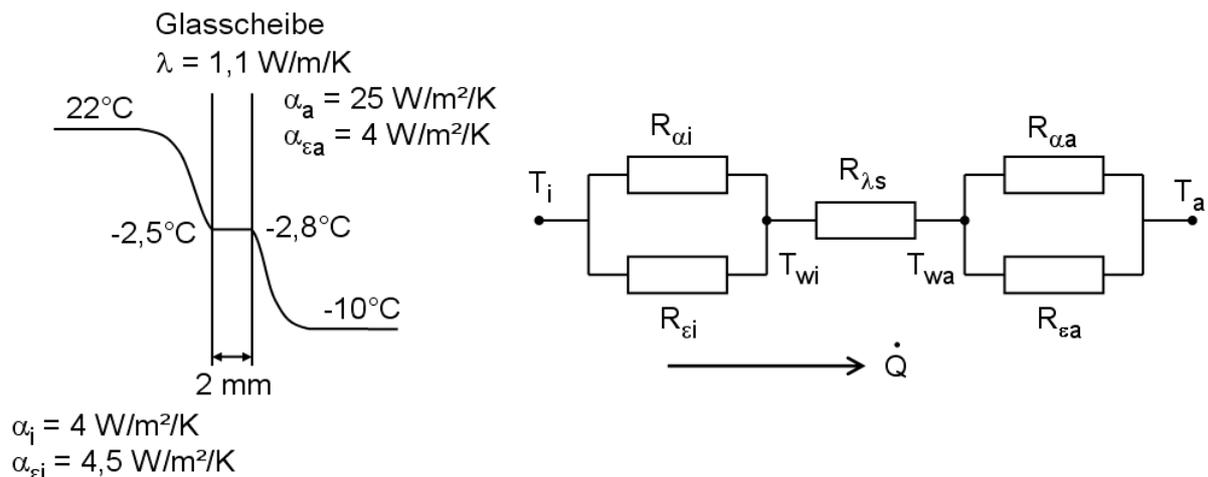
Auf der linken Seite fließt Wasser mit einem Wärmeübergangskoeffizienten von etwa $\alpha_i = 5000 \text{ W/m}^2/\text{K}$ (siehe Tabelle 1-1). Die Wand aus Stahl besitzt einen Wärmeleitkoeffizienten von $\lambda = 50 \text{ W/m/K}$ (siehe Bild 1-2) und eine Dicke von $s = 5 \text{ mm}$. Die rechte Seite der Wand wird mit Luft umströmt. Hier wird Wärme sowohl durch Konvektion als auch durch Strahlung abgeführt. Beide Wärmeströme sind unabhängig voneinander und überlagern sich somit, was durch die zwei parallel geschalteten Übergangswiderstände symbolisiert wird. Wird die Strahlung durch einen Wärmeübergangskoeffizienten entsprechend Gleichung (1-22) angenähert, so können beide Wärmeübergangskoeffizienten addiert werden. Hier wird angenommen, dass die Summe beider Wärmeübergangskoeffizienten den relativ hohen Wert von $\alpha_a = 50 \text{ W/m}^2/\text{K}$ hat. Die Oberfläche der Wand wird vereinfachend zu $A = 1 \text{ m}^2$ eingesetzt. Der Gesamtwiderstand

$$\Sigma R = \left(\frac{1}{5000} + \frac{0,005}{50} + \frac{1}{50} \right) \frac{\text{K}}{\text{W}} = (2 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} + 200 \cdot 10^{-4}) \frac{\text{K}}{\text{W}} = 203 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

ist folglich nur wenig größer als der Übergangswiderstand zur Luftseite. Die durch die Wand fließende Wärme wird daher hauptsächlich von diesem Widerstand bestimmt. Eine Veränderung des Wärmeübergangskoeffizienten auf der Wasserseite oder des Wärmeleitwiderstandes der Wand würde daher den Wärmestrom kaum beeinflussen. Nur eine Verbesserung des luftseitigen Wärmeübergangskoeffizienten vergrößert die übertragene Wärme wesentlich. Eine technische Maßnahme hierzu ist die Anbringung von Rippen auf dieser Fläche, worauf im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

Beispiel 2-1: Wirkung von Thermopanefenstern

Der Wärmedurchgang durch Fenster mit Einfach- und Doppelverglasung (Thermopanefenster) soll mit einander verglichen werden. In der Skizze 2.1 ist der Temperaturverlauf durch das Fenster mit einer Scheibe qualitativ dargestellt. Die Innenraumtemperatur sei 22 °C, außen sei windiges Winterwetter mit -10 °C. Die Scheibe habe eine Dicke von 2 mm und einen typischen Wärmeleitkoeffizienten von 1,1 W/m/K. Innen wird Wärme durch freie Konvektion und Strahlung an die Glasscheibe übertragen. Nach Bild 1-6 beträgt der Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvektion bei einer Temperaturdifferenz zwischen der Wand und dem Fluid von 20 K etwa 4 W/m²/K. Der Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung beträgt nach Bild 1-7 etwa 4,5 W/m²/K innen und 4 W/m²/K außen wegen der hier etwas geringeren Temperaturen. Der Wärmeübergangskoeffizient für die windige (turbulente) Außenströmung wird gemäß Bild 1-4 zu 25 W/m²/K abgeschätzt. Das zugehörige Ersatzschaltbild für die Widerstände ist ebenfalls in der Skizze enthalten. (Die SI-Einheiten werden einfachheit halber teilweise weggelassen.)



Skizze 2.1: Fenster mit Einfachverglasung

Für den Wärmedurchgangskoeffizienten ergibt sich somit

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{ei}} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a + \alpha_{ea}} = \frac{1}{4 + 4,5} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1,1} + \frac{1}{25 + 4} = 0,118 + 0,002 + 0,034 = 0,154$$

$$\Rightarrow k \approx 6,5 \text{ W/m}^2/\text{K}.$$

Der Widerstand der Wärmeleitung durch die Glasscheibe ist also vernachlässigbar klein. Die Wärmestromdichte durch die Wand ist

$$\dot{q}_1 = k_1 \cdot (T_i - T_a) = 6,5 \cdot 32 = 208 \text{ W/m}^2.$$

Für den Wärmestrom gilt ebenfalls

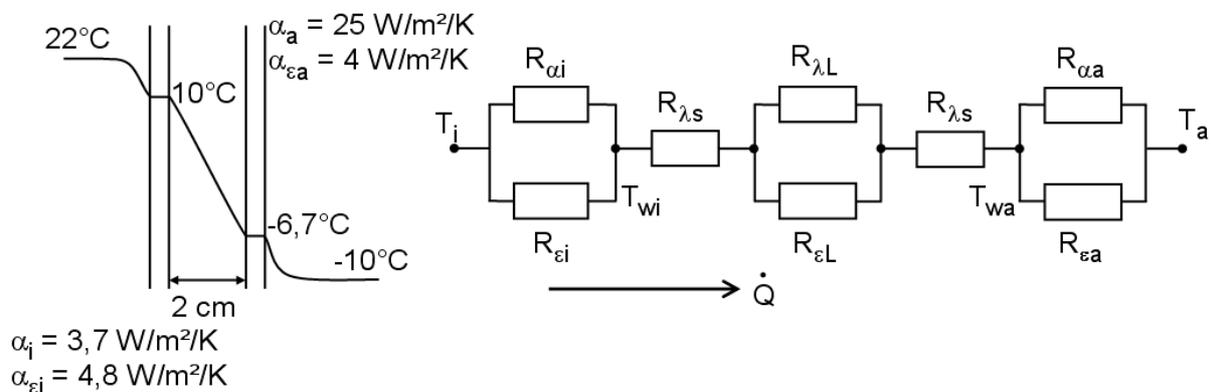
$$\dot{q}_1 = (\alpha_i + \alpha_{ei}) \cdot (T_i - T_{wi}).$$

Daraus folgt für die Temperatur der Scheibe an der inneren Oberfläche

$$T_{wi} = T_i - \frac{k}{\alpha_i + \alpha_{ei}} \cdot (T_i - T_a) = -2,5^\circ\text{C}.$$

Aufgrund des geringeren Wärmeleitwiderstandes ist die Oberflächentemperatur der Scheibe auf der äußeren Oberfläche nur um etwa 0,3 K niedriger.

Da die innere Oberfläche der Scheibe Minustemperaturen annimmt, gefriert die kondensierte Raumfeuchtigkeit. Es bilden sich sogenannte Eisblumen aus.



Skizze 2.2: Thermopanefenster

In der Skizze 2.2 ist der Temperaturverlauf in einem Fenster mit Doppelverglasung qualitativ dargestellt, wiederum mit zugehörigem Ersatzschaltbild. Die Scheiben sollen einen Abstand von 2 cm haben. Die Wärme muss nun durch den Luftspalt zwischen den beiden Scheiben geleitet werden. Dieser Leitung ist eine Strahlung überlagert. Daraus folgt für den Wärmedurchgangskoeffizienten, wobei die Leitung durch die Glasscheibe vernachlässigt ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_{ei}} + \frac{1}{\lambda_L / s_L + \alpha_{\epsilon g}} + \frac{1}{\alpha_a + \alpha_{\epsilon a}}.$$

Der innere Wärmeübergangskoeffizient durch freie Konvektion ist etwas geringer und der durch Strahlung etwas höher als im vorherigen Beispiel, da die Temperaturdifferenz zwischen der Luft und der inneren Scheibe geringer ist. Es wird angenommen, dass die Summe beider gleich bleibt. Die Wärmeleitfähigkeit der Luft beträgt $0,026 \text{ W/m/K}$, der Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung zwischen den beiden Scheiben etwa $4,2 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Damit folgt

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{3,7 + 4,8} + \frac{1}{0,026/0,02 + 4,2} + \frac{1}{25 + 4} = \frac{1}{8,5} + \frac{1}{1,3 + 4,2} + \frac{1}{29}$$

$$= 0,118 + 0,182 + 0,034 = 0,334$$

$$\Rightarrow k = 3,0 \text{ W/m}^2/\text{K}.$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient ist also durch die Doppelverglasung etwa halbiert worden. Wie man erkennt, ist der Wärmeübergangskoeffizient durch die Strahlung zwischen den Scheiben mit $4,2$ etwa dreimal so hoch wie der durch die Leitung in der Luft mit $1,3$. Ein größerer Abstand der Scheiben zur weiteren Erhöhung des Wärmeleitwiderstandes hat also nur eine geringe Wirkung. Zudem tritt dann die Gefahr auf, dass sich zwischen den Scheiben eine Umlaufströmung durch freie Konvektion ausbildet, die den Widerstand wiederum verringert. Eine Erhöhung der Isolierwirkung kann noch durch eine Evakuierung zwischen den Scheiben erreicht werden, was bei Hochleistungsisolierbehältern gemacht wird. Die Isolierwirkung der Scheiben kann deutlich verbessert werden, wenn die Oberfläche mit einem Metallfilm beschichtet wird, wodurch der Emissionsgrad um ein Vielfaches abgesenkt werden kann. Daher sind die Wände von Hochleistungsisolierbehältern zusätzlich verspiegelt. Eine solche Verspiegelung hat einen Emissionsgrad kleiner als $0,09$, so dass die Wärmestrahlung mehr als um den Faktor 10 verringert wird. Eine solche Hochleistungsisolierung hätte für dieses Beispiel einen Wärmedurchgangskoeffizienten von

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{3,7 + 0,48} + \frac{1}{0 + 0,42} + \frac{1}{25 + 0,4} = 0,239 + 2,381 + 0,039 = 2,66$$

$$\Rightarrow k = 0,38 \text{ W/m}^2/\text{K}$$

also nur $1/8$ des vorherigen Wertes.

Durch die Doppelverglasung wird die Wärmestromdichte also etwa um die Hälfte verringert. Da in Deutschland die mittlere Jahresaußentemperatur etwa bei $9 \text{ }^\circ\text{C}$ liegt, ist der Wärmeverlust durch das einfache Glasfenster deutlich kleiner als 208 W/m^2 . Nimmt man als grobe Abschätzung an: eine mittlere Wärmestromdichte bei Einfachverglasung 100 W/m^2 , eine Einsparung von 50% bei Doppelverglasung und Heizkosten von 6 Cent/kWh , so ergibt sich eine Einsparung von 26 €/Jahr/m^2 . Der Austausch eines Fensters mit Einfachverglasung gegen ein Thermopanefenster nur aus Isolierzwecken benötigt also sehr lange Amortisationszeiten. Ein Austausch kann sich jedoch auch aus anderen Gründen lohnen. Eine bessere Isolierwirkung kann gegebenenfalls noch dadurch erreicht werden, dass durch den Einbau des neuen Fensters Undichtigkeiten beseitigt werden. In jedem Fall wird durch ein Thermopanefenster die Behaglichkeit im Raum verbessert:

Erstens wird die Temperatur der inneren Scheibe erheblich angehoben. Dadurch ist die Wärmeabstrahlung von Personen an deren zum Fenster gewandten Seite geringer. Ist der Wärmeverlust zu allen Seiten etwa gleichmäßig, fühlt man sich behaglicher als bei einem sehr ungleichmäßigen Wärmeverlust. Dieser Effekt ist beispielsweise vom Lagerfeuer bekannt, bei dem man sich zur Aufwärmung des Rückens öfters umdreht. Zur Verringerung der Abstrahlung von Personen an das kalte Fenster werden Heizungskörper unterhalb des Fensters angebracht. Bei Thermopane-fenstern ist daher auch eine Ausdehnung dieser bis zum Boden möglich, da nun die Heizkörper auch an anderen Wänden angebracht werden können.

Zweitens kondensiert an der inneren Scheibe auf Grund der erhöhten Temperatur keine Luftfeuchtigkeit mehr. Ein Beschlagen der Fenster tritt nur noch selten auf.

Drittens vermindern Thermopane-fenster deutlich den Lärm von außen.

Beispiel 2-2: Wirkung einer Hauswandisolierung

- a) Die $A_w = 10 \text{ m}^2$ große Außenwand eines Raumes besteht aus einem $s_M = 38 \text{ cm}$ starkem Ziegelmauerwerk, dessen Wärmeleitkoeffizient $\lambda_M = 0,75 \text{ W/m/K}$ beträgt. Die Raumtemperatur wird in der Heizperiode von $t_H = 210 \text{ Tage/Jahr}$ durch ein Thermostat auf $T_{u,i} = 22^\circ\text{C}$ geregelt. Die durchschnittliche Außentemperatur in der Heizperiode beträgt $T_{u,a} = 4^\circ\text{C}$.

Wie groß ist der Wärmestrom durch die Wand?

Die Wärmeübergangskoeffizienten auf der Innenseite der Wand durch freie Konvektion und Strahlung werden jeweils zu etwa $4 \text{ W/m}^2/\text{K}$ angenommen, wie im Beispiel zuvor. Die entsprechenden Wärmeübergangskoeffizienten auf der Außenseite werden zusammen mit $18 \text{ W/m}^2/\text{K}$ angenommen. Damit folgt für den Wärmedurchgangskoeffizienten

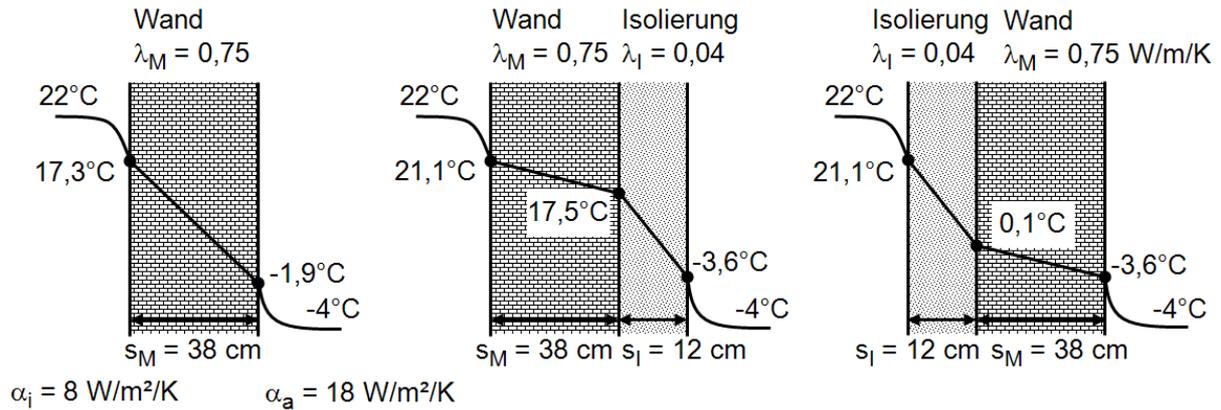
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_M}{\lambda_M} + \frac{1}{\alpha_a} = \frac{1}{8} + \frac{0,38}{0,75} + \frac{1}{18} = 0,125 + 0,507 + 0,056 = 0,688$$

$$\Rightarrow k = 1,46 \text{ W/m}^2/\text{K}.$$

Das Mauerwerk besitzt hier den größten Wärmetransportwiderstand. Als Wärmestrom ergibt sich

$$\dot{Q}_1 = k \cdot (T_i - T_a) \cdot A_w = 1,46 \cdot (22 - 4) \cdot 10 = 263 \text{ W}.$$

- b) Wie viel Liter Heizöl sind jährlich mit einem feuerungstechnischen Wirkungsgrad von $\eta_f = 0,92$ zu verbrennen, um den Wärmestrom durch die Wand auszugleichen? Rechnen Sie mit einem Heizölheizwert von $h_u = 42,7 \text{ MJ/kg}$ und einer Heizöldichte von $\rho_{\text{Öl}} = 0,85 \text{ kg/l}$. Wie hoch sind die jährlichen Brennstoffkosten bei einem Heizölpreis von $1,0 \text{ €/l} = 12 \text{ Ct/kWh}$?



Skizze 2.3: Wärmedurchgang bei einer Hauswand

Für die in der Heizung hierzu verbrannte Ölmenge gilt

$$M_{\text{Öl}} \cdot h_u \cdot \eta_f = \dot{Q} \cdot t_H$$

Daraus folgt für das Ölvolumen

$$V_{\text{Öl}} = \frac{\dot{Q} \cdot t_H}{\rho_{\text{Öl}} \cdot h_u \cdot \eta_f} = \frac{263 \text{ J/s} \cdot 210 \text{ Tage/Jahr} \cdot 24 \text{ h/Tag} \cdot 3600 \text{ s/h}}{0,85 \text{ kg/l} \cdot 42,7 \text{ MJ/kg} \cdot 0,92} = 143 \text{ l/Jahr}$$

- c) Es wird in Betracht gezogen, die Außenwand mit einer $s_i = 12 \text{ cm}$ starken Hartfaserplatte mit einem Wärmeleitkoeffizienten von $\lambda_i = 0,04 \text{ W/m/K}$ zu isolieren. Um wie viel Prozent würde sich der Wärmeverlust verringern?

Der Wärmekoeffizient berechnet sich in diesem Fall zu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_M}{\lambda_M} + \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_a} = 0,125 + 0,507 + 3,000 + 0,056 = 3,69$$

$$\Rightarrow k = 0,27 \text{ W/m}^2/\text{K}$$

Der Wärmestrom würde sich also um 81 % auf 48,8 W verringern.

- d) Ein Fachbetrieb verlangt für die Wärmedämmmaßnahme 50 €/m². Nach welcher Zeit hätte sich die Wärmedämmung der Wand amortisiert, wenn die Zinsen durch staatliche Zuschüsse kompensiert werden?

Die Kosten der Dämmung betragen $10 \cdot 50 = 500 \text{ €}$. Pro Jahr werden $0,810 \cdot 143 = 116$ Liter Öl hierfür eingespart. Bei einem Heizölpreis von 1 €/l hätten sich also die Kosten nach 4,3 Jahren amortisiert. Bei einem Heizölpreis von 0,8 €/l beträgt die Amortisationszeit 5,4 Jahre.

- e) Wie verändert sich die innere Oberflächentemperatur der Wand durch die Wärmedämmung bei einer winterlichen Außentemperatur von -4 °C ?

Für die Wärmestromdicht gilt

$$\dot{q} = k \cdot (T_i - T_a) = \alpha_i \cdot (T_i - T_{wi}).$$

Daraus folgt für die innere Wandtemperatur

$$T_{wi} = T_i - \frac{k}{\alpha_i} \cdot (T_i - T_a).$$

Ohne Wärmedämmung ergibt sich

$$T_{wi} = 22 - \frac{1,46}{8} \cdot (22 + 4) = 17,3\text{ °C}$$

und mit Dämmung

$$T_{wi} = 22 - \frac{0,27}{8} \cdot (22 + 4) = 21,1\text{ °C}.$$

Die Wandinnentemperatur wird also durch die Dämmung angehoben. Dadurch verbessert sich wiederum die Behaglichkeit, da die Abstrahlung an eine große Fläche verringert wird. Dies macht sich besonders bemerkbar, wenn sich die kalte Wand vornehmlich im Rücken der Personen im Raum befindet. Bei Räumen mit kalten Wänden wird zu Erhöhung der Behaglichkeit oftmals eine hohe Raumlufttemperatur eingestellt. Bei allseits warmen Wänden wird dagegen eine nicht so hohe Raumlufttemperatur benötigt. Dadurch wird zusätzlich der Wärmeverluststrom durch die Wand verringert. Dieser Effekt macht sich umso stärker bemerkbar, je geringer die Wand zuvor wärmedämmte war.

- f) Was würde sich ändern, wenn das Mauerwerk innen anstatt außen gedämmt würde?

Am Verlustwärmestrom würde sich nichts ändern, da die Wärmewiderstände in Reihe geschaltet sind. Jedoch wird der Temperaturverlauf in der Wand abgesenkt. Dadurch kann in der Wand Luftfeuchtigkeit kondensieren, was zu Schäden führt. Hierauf wird im Kapitel Stofftransport noch eingegangen werden. Daher dürfen Hauswände nur außen isoliert werden.

Beispiel 2-3: Isolierung eines Heizungsrohres

Durch ein freiliegendes Heizungsrohr aus Kupfer ($\lambda = 390\text{ W/m/K}$) mit einem Außendurchmesser von 40 mm und einer Wandstärke von 0,5 mm fließt Wasser von 80 °C . Die umgebende Kellertemperatur sei 10 °C .

- a) Wie groß ist der Wärmeverlust, wenn das Rohr zum einen blank ist und zum anderen mit weißer Farbe gestrichen ist, um nicht so aufzufallen?

Die Wärmewiderstände durch den konvektiven Wärmeübergang des Wassers ($\alpha > 800 \text{ W/m}^2/\text{K}$) und die Leitung durch die Wand können vernachlässigt werden, wie bereits mit einem Beispiel gezeigt wurde. Daher wird der Wärmeverlust lediglich durch den äußeren Wärmeübergang bestimmt, der sich wiederum aus freier Konvektion und Strahlung zusammensetzt. Für die freie Konvektion ergibt sich aus Gleichung (1-24) für die Graßhofzahl

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot L^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_u - \rho_w}{\rho_u} = \frac{g \cdot (1/2 \cdot \pi \cdot d)^3}{\nu^2} \cdot \frac{1/T_u - 1/T_w}{1/T_u},$$

wobei $1/2 \cdot \pi \cdot d$ die Überströmlänge ist (halber Umfang),

$$\text{Gr} = \frac{9,81 \cdot (1/2 \cdot \pi \cdot 0,04)^3}{(2 \cdot 10^{-5})^2} \cdot \frac{1/283 - 1/353}{1/283} = 1,2 \cdot 10^6.$$

Die Strömung ist somit laminar, da $\text{Pr} = 0,7$ für Luft gilt. Für den Wärmeübergangskoeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda}{L} \cdot \text{Nu} \cdot \frac{\lambda}{1/2 \cdot \pi \cdot d} \cdot 0,57 \cdot \text{Gr}^{1/4} \cdot \text{Pr}^{1/4} \\ &= \frac{2 \cdot 0,03}{\pi \cdot 0,04} \cdot 0,57 \cdot (1,2 \cdot 10^6)^{1/4} \cdot 0,7^{1/4} = 8,2 \text{ W/m}^2/\text{K}. \end{aligned}$$

Der Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung liegt für angestrichene Rohre ($\varepsilon = 0,9$) nach Bild 1-7 etwa bis $7 \text{ W/m}^2/\text{K}$, da Farbanstriche nach Tabelle 1-3 einen hohen Emissionsgrad aufweisen. Blankes Kupfer weist dagegen nur einen Emissionsgrad von $0,03$ auf, was zu einem Wärmeübergangskoeffizienten von etwa $0,2 \text{ W/m}^2/\text{K}$ führt. Der spezifische Wärmeverluststrom

$$\dot{Q}_n / L = \pi \cdot d \cdot (\alpha + \alpha_\varepsilon) \cdot (T_i - T_a)$$

beträgt folglich beim blanken Rohr

$$\dot{Q}_n / L = \pi \cdot 0,04 \cdot (8,2 + 0,2) \cdot (80 - 10) = 74 \text{ W/m}$$

und beim Rohr mit Farbe

$$\dot{Q}_f / L = \pi \cdot 0,04 \cdot (8,2 + 7,0) \cdot (80 - 10) = 134 \text{ W/m}.$$

Die Farbe erhöht also den Wärmeverlust um etwa das Doppelte.

- b) Das Rohr wird mit einem Hohlzylinder aus Isolierschaum ($\lambda \approx 0,04 \text{ W/m/K}$) mit einer Wandstärke von 2 cm überzogen. Wie ist die Wirkung?

Das Radienverhältnis des Hohlzylinders ist 2. Damit kann nach Bild 2-2 die Wärmeleitung durch die Gleichung für die Platte angenähert werden. Beachtet werden muss jedoch dass die Wärmeübergangskoeffizienten an der Außenschale der Isolierung von deren Temperatur abhängen. Diese Temperatur muss daher iterativ ermittelt werden. Hier wird die Temperatur zu 20 °C abgeschätzt. Der Wärmeübergangskoeffizient durch freie Konvektion berechnet sich nun wegen der geringen Temperaturdifferenz aber höheren Überströmlänge zu

$$\text{Gr} = \frac{9,81 \cdot (1/2 \cdot \pi \cdot 0,08)^3}{(2 \cdot 10^{-5})^2} \cdot \frac{1/283 - 1/293}{1/283} = 1,66 \cdot 10^6$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 0,03}{\pi \cdot 0,08} \cdot 0,57 \cdot (1,66 \cdot 10^6 \cdot 0,7)^{1/4} = 4,5 \text{ W/m}^2/\text{K}.$$

Der Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung beträgt ungefähr $4 \text{ W/m}^2/\text{K}$, da die Isolierung einen hohen Emissionsgrad besitzt. Der Wärmestrom berechnet sich nun zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{is}}/L &= \pi \cdot d_{\text{is}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha + \alpha_{\epsilon}} + \frac{s_{\text{is}}}{\lambda_{\text{is}}}} \right) \cdot (T_i - T_a) \\ &= \pi \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4,5 + 4} + \frac{0,02}{0,04}} \cdot (80 - 10) = 28,5 \text{ W/m}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich bei Rohren infolge der Isolierung die Wärmeübertragungsfläche vergrößert.

Die Isolierung verringert also den Verlustwärmestrom beim blanken Rohr um $1 - 28,5/74 \approx 60\%$ sind beim angestrichenen Rohr um $1 - 28,5/134 \approx 80\%$.

- c) Hohlzylinder zur Heizungsrohrisolierung sind handelsüblich in Baumärkten etc. erhältlich. Der Preis liegt in der Größenordnung von 1 €/m je nach Durchmesser. Wie lang ist die Amortisationszeit, falls man als Heimwerker die Zeit zum Kauf und zur Installation als Hobby ansieht? Gehen Sie wie in einem vorherigen Beispiel von einem feuerungstechnischen Wirkungsgrad von 0,92 und einem Brennstoffpreis von $0,5 - 1 \text{ €/l} = 6 - 12 \text{ Ct/kWh}$ aus.

Der jährliche Ölverbrauch ohne Isolierung beträgt

$$V_{\text{öl}} = \frac{\dot{Q} \cdot t_{\text{H}}}{\rho_{\text{öl}} \cdot h_{\text{u}} \cdot \eta_{\text{f}}} = \frac{74 \text{ J/s/m} \cdot 360 \text{ l/a} \cdot 24 \text{ h/d} \cdot 3600 \text{ s/d}}{0,85 \text{ kg/l} \cdot 42,7 \text{ MJ/kg} \cdot 0,92} = 69 \text{ l/a/m}.$$

Bei einer Verringerung um 70 % durch die Isolierung spart man jährlich 25 bis 50 €/m. Die Amortisationszeit liegt also bei etwa 3 bis 6 Wochen.

2.5 Temperaturabhängiger Wärmeleitkoeffizient

Ist die Temperaturdifferenz in dem festen Körper sehr groß, beispielsweise mehrere hundert Kelvin, so kann der Wärmeleitkoeffizient in der Regel nicht mehr als konstant angenommen werden. Für die Wärmestromdichte gilt dann

$$\dot{q} = \frac{1}{s} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT. \quad (2-40)$$

Der Temperaturverlauf in der ebenen Wand ist dann nicht mehr linear, sondern gekrümmt. Je höher der Wärmeleitkoeffizient ist, desto niedriger muss der Temperaturgradient sein.

Zur Verwendung der bisherigen Gleichungen für den Wärmedurchgang empfiehlt sich ein temperaturgemittelter Wärmeleitkoeffizient gemäß

$$\lambda_m = \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT. \quad (2-41)$$

Zuerst wird der einfache Fall betrachtet, dass der Wärmeleitkoeffizient durch eine lineare Temperaturfunktion angenähert werden kann entsprechend

$$\lambda(T) = \lambda_0 + a \cdot (T - T_0), \quad (2-42)$$

wobei λ_0 beispielsweise der Wert bei der Umgebungstemperatur T_0 ist. Für den mittleren Wert folgt dann

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0(T_1 - T_2) + a/2 \cdot (T_1 - T_2)^2}{T_1 - T_2} = \lambda_0 + a \cdot \frac{(T_1 + T_2)}{2} = \frac{\lambda(T_1) + \lambda(T_2)}{2}. \quad (2-43)$$

Der mittlere Wert des Wärmeleitkoeffizienten ist der Wärmeleitkoeffizient bei der mittleren Temperatur oder der gemittelte Wert der beiden Wärmeleitkoeffizienten an den Rändern mit T_1 und T_2 . Diese Werte sind von vornherein nicht bekannt sondern ergeben sich aus der Wärmedurchgangsberechnung. Diese muss daher bei temperaturabhängigen Wärmeleitkoeffizienten in der Regel numerisch durchgeführt werden.

Isolierstoffe weisen ein großes Hohlraumvolumen und somit eine geringe Dichte auf. In den Hohlräumen wird Wärme von Wand zu Wand durch Strahlung transportiert. Dieser Transport steigt entsprechend Gleichung (1-31) für den Wärmeübergangskoeffizienten durch Strahlung etwa mit der dritten Potenz der Temperatur an entsprechend

$$\lambda(T) = \lambda_0 + a \cdot (T^3 - T_0^3). \quad (2-44)$$

Für diesen zweiten hier betrachteten Fall erhält man somit für den mittleren Wärmeleitkoeffizienten aus Gleichung (2-41)

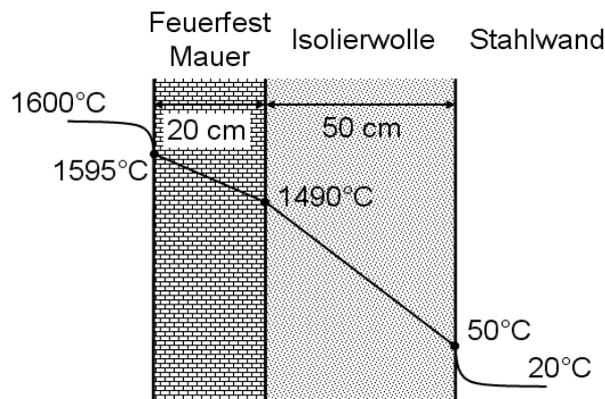
$$\lambda_m = \lambda_0 + \frac{a}{4} \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} - a \cdot T_0^3 = \lambda_0 + \frac{a}{4} \cdot T_1^3 \cdot \left[1 + \frac{T_2}{T_1} + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^3 \right] - a \cdot T_0^3. \quad (2-45)$$

Ist wie bei Prozessen der Hochtemperaturtechnik die Temperatur T_1 viel höher als die Temperatur T_2 , so gilt näherungsweise

$$\lambda_m(T_1 \gg T_2) \approx \lambda_0 + \frac{a}{4} \cdot (T_1^3 - T_0^3). \quad (2-46)$$

Beispiel 2-4: Ofenwandisolierung

In einem Tunnelofen zur Herstellung von Porzellan herrscht innen eine Gastemperatur von $1600 \text{ }^\circ\text{C}$. Die Wand des Ofens besteht entsprechend der Skizze 2.4 aus einer Mauer mit Feuerfeststeinen (Dicke $s_M = 0,2 \text{ m}$, $\lambda_M \approx 1 \text{ W/m/K}$), zur Isolierung aus einer Schicht mit Fasermatten $s_F = 0,5 \text{ m}$ und einer Stahlwand ($s_s = 1 \text{ mm}$, $\lambda_s = 40 \text{ W/m/K}$). In der Produktionshalle beträgt die Lufttemperatur $20 \text{ }^\circ\text{C}$.



Skizze 2.4: Wärmedurchgang bei einer Industrieofenwand

- a) Wie groß ist der Wärmedurchgangskoeffizient und wie sieht der Temperaturverlauf in der Wand aus?

Die Wärme wird vom Gas an die innere Wand überwiegend durch Strahlung übertragen. Nach Bild 1-7 ergibt sich bei $1600 \text{ }^\circ\text{C}$ ein Wärmeübergangskoeffizient von etwa $500 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Der Wärmeleitkoeffizient von Feuerfeststeinen steigt leicht mit der Temperatur linear an (siehe Stoffwertebilder im Anhang). Der mittlere Wert bei $800 \text{ }^\circ\text{C}$ beträgt etwa 1 W/m/K . Die Wärmeleitfähigkeit von Fasermatten kann durch

$$\lambda_F = 0,04 + 8 \cdot 10^{-11} \cdot (T^3 - T_0^3)$$

angenähert werden. Als mittlerer Wert bei 1500 °C (Temperatur hinter Mauer) ergibt sich aus Gleichung (2-46)

$$\lambda_{Fm} = 0,04 + \frac{0,45}{4} = 0,15 \text{ W/m/K.}$$

Den Wärmetransportwiderstand durch die Stahlwand kann man wiederum vernachlässigen. Der äußere Wärmeübergangskoeffizient durch freie Konvektion und Strahlung wird jeweils zu 7 W/m²/K abgeschätzt. Damit folgt für den Wärmedurchgangskoeffizienten

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{Ei}} + \frac{s_M}{\lambda_M} + \frac{s_F}{\lambda_F} + \frac{1}{\alpha_a} = \frac{1}{500} + \frac{0,2}{1} + \frac{0,5}{0,15} + \frac{1}{14} = 0 + 0,2 + 3,33 + 0,07 = 3,60$$

$$\Rightarrow k = 0,28 \text{ W/m}^2/\text{K.}$$

Den Wärmewiderstand bildet also hauptsächlich die Fasermatte. Für die Temperaturdifferenzen gelten

$$\Delta T_i = \frac{k}{\alpha_i} \cdot \Delta T_{\max}, \quad \Delta T_i = \frac{k \cdot s_i}{\lambda_i} \cdot \Delta T_{\max}.$$

Die sich daraus ergebenden Werte der Temperaturen und der Verlauf sind in der Skizze angegeben.

- b) Was würde passieren, wenn die Außenwand zur weiteren Verringerung der Wärmeverluste mit einer Farbe aus Aluminiumbronze angestrichen wird?

Der äußere Wärmeübergangskoeffizient würde etwa halbiert werden. Der Wärmedurchgangskoeffizient würde sich um 2 % verringern. Die äußere Temperaturdifferenz würde sich jedoch verdoppeln, so dass die Wand eine Oberflächentemperatur von 80 °C bekäme. Diese Temperatur ist aus Sicherheitsgründen zu hoch.

2.6 Wärmeleitung in Rippen

Wie das Beispiel für die Wärmewiderstände gezeigt hat, wird der Wärmestrom durch eine Wand oft nur durch einen einzigen Widerstand bestimmt, wenn nämlich dieser wesentlich größer ist als die Summe aller anderen Widerstände. Dies ist im allgemeinen dann der Fall, wenn auf der einen Seite einer Wand ein Gas, auf der anderen hingegen eine Flüssigkeit strömt. Der gaseitige Wärmeübergangskoeffizient ist häufig sehr viel kleiner als der flüssigkeitsseitige (Tabelle 1-1), und außerdem kann der Wärmeleitwiderstand der Wand vernachlässigt werden. Der gaseitige und damit der gesamte Wärmeübergang lässt sich in diesen Fällen dadurch verbessern, dass man die Wärmeübertragungsfläche durch Anbringen von Rippen vergrößert, wie dies z. B. bei Heizkörpern oder Kühlrippen üblich ist. Zur Dimensionierung solcher Rippen muss bekannt sein, in welcher Weise die Wärme von ihnen übertragen wird. Der Temperaturverlauf und die übertragene Wärme werden im folgenden Abschnitt berechnet.

Bild 2-6 zeigt qualitativ den Temperaturverlauf längs einer stabförmigen Rippe mit konstantem Querschnitt. Die Temperatur am Rippenfuß ist die Wandtemperatur $T_{x=0}$. Die Rippe hat die Länge L , den Umfang U und den konstanten Querschnitt A . Der Wärmeübergangskoeffizient längs der Rippenoberfläche und die Umgebungstemperatur werden als konstant vorausgesetzt. Die Wärmeleitung wird nur in x -Richtung berücksichtigt, d. h. es wird der Verlauf der Rippentemperatur als Funktion der Längskoordinate x bestimmt. Diese Vereinfachung ist im Allgemeinen zulässig, da die Länge von Rippen groß gegenüber ihrer Breite ist und damit die Temperaturänderung über dem Querschnitt vernachlässigt werden kann.

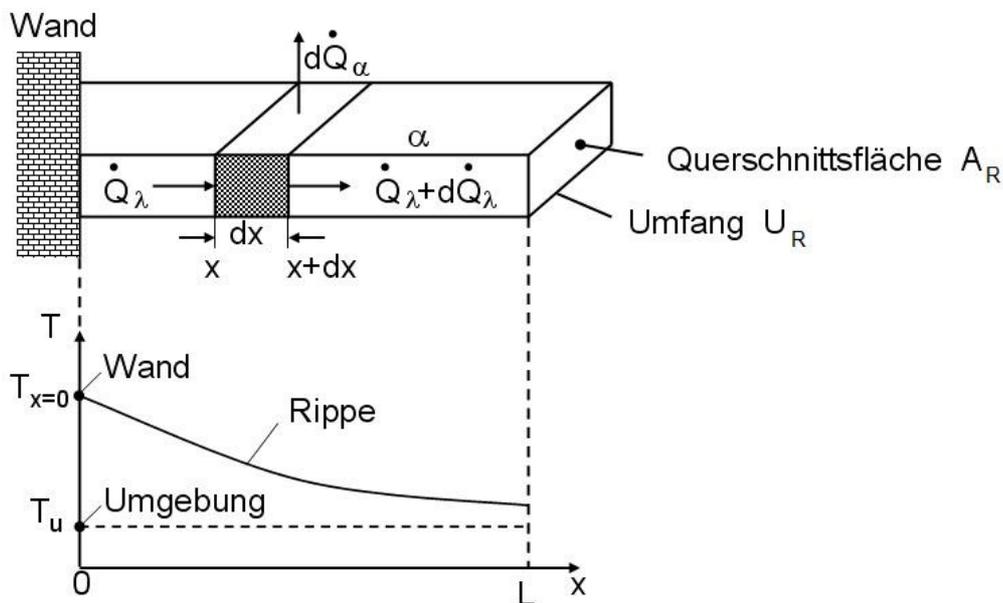


Bild 2-6: Wärmeübertragung an einer stabförmigen Rippe

In das Volumenelement $A \cdot dx$ fließt durch Wärmeleitung über die Querschnittsfläche A der Wärmestrom \dot{Q}_λ hinein und aus dem Element der Wärmestrom $(\dot{Q}_\lambda + d\dot{Q}_\lambda)$ wieder heraus (TAYLORreihenentwicklung und Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung). Außerdem wird über die Außenfläche $U \cdot dx$ konvektiv der Wärmestrom

$d\dot{Q}_\alpha$ an die Umgebung übertragen. Im stationären Zustand lautet folglich die Energiebilanz

$$d\dot{Q}_\lambda + d\dot{Q}_\alpha = 0. \quad (2-47)$$

Für den Wärmestrom durch Leitung in der Rippe gilt

$$\dot{Q}_\lambda = -\lambda \cdot A_R \cdot \frac{dT}{dx}, \quad (2-48)$$

woraus für die Änderung

$$d\dot{Q}_\lambda = \frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx} \cdot dx = -\lambda \cdot A_R \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \cdot dx \quad (2-49)$$

folgt. Für den konvektiv übertragenen Wärmestrom gilt nach dem NEWTONSchen Ansatz

$$d\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot U_R \cdot dx \cdot (T - T_u). \quad (2-50)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (2-47) die Dgl für den Temperaturverlauf längs der Rippe

$$\frac{d^2(T - T_u)}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R} \cdot (T - T_u). \quad (2-51)$$

Zur Lösung werden zwei Randbedingungen benötigt. Am Rippenfuß ($x = 0$) beträgt die Temperatur

$$T(x = 0) = T_{x=0}. \quad (2-52)$$

Am Ende der Rippe ($x = L$) wird angenommen, dass die über die Stirnfläche übertragene Wärme vernachlässigbar klein ist. Daher kann hier der Temperaturgradient gleich null gesetzt werden

$$\frac{dT}{dx}(x = L) = 0. \quad (2-53)$$

Mit diesen beiden Randbedingungen ergibt sich als Lösung der Dgl

$$\frac{T - T_u}{T_{x=0} - T_u} = \frac{\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R}} \cdot (L - x)\right]}{\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R}} \cdot L\right]}. \quad (2-54)$$

Für eine unendlich lange Rippe folgt hieraus mit dem Grenzübergang $L \rightarrow \infty$

$$\frac{T - T_u}{T_{x=0} - T_u} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R}} \cdot x\right). \quad (2-55)$$

Diese Gleichung ergibt sich auch, wenn anstatt der Randbedingung (2-53) die Bedingung verwendet wird, dass bei einer unendlich langen Rippe die Temperatur an der Spitze auf Umgebungstemperatur abgesunken ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = T_u. \quad (2-56)$$

Durch die Verlängerung der Rippe wird wegen der vergrößerten Übertragungsfläche der an die Umgebung übertragene Wärmestrom erhöht.

Für diesen erhält man

$$\dot{Q}_R = \int_0^L (T(x) - T_u) \cdot \alpha \cdot U_R \cdot dx. \quad (2-57)$$

Mit dem Temperaturverlauf aus Gleichung (2-54) folgt aus der Integration für den von der Rippe übertragenen Wärmestrom

$$\dot{Q}_R = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_u) \cdot A_R \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot U_R}{\alpha \cdot A_R}} \cdot \tanh \sqrt{\frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R}} \cdot L^2. \quad (2-58)$$

Eine unendlich lange Rippe überträgt den maximalen Wärmestrom

$$\dot{Q}_{R\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \dot{Q}_R = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_u) \cdot A_R \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot U_R}{\alpha \cdot A_R}}. \quad (2-59)$$

Aus dem Verhältnis $\dot{Q}_R / \dot{Q}_{R\infty}$ der übertragenen Wärmeströme bei einer Rippe mit endlicher Länge L zu einer mit unendlicher Länge kann man ersehen, welchen Anteil des maximalen Wärmestroms eine Rippe überträgt, d. h. wie gut ihr Wirkungsgrad ist.

$$\frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_{R\infty}} = \eta_R = \tanh \cdot \sqrt{\frac{\alpha \cdot U_R}{\lambda \cdot A_R}} \cdot L^2. \quad (2-60)$$

Diese im Bild 2-7 dargestellte Abhängigkeit dient der Beurteilung, ab welcher Länge der Rippe eine Erhöhung des Wärmestroms nicht mehr im wirtschaftlichen Verhältnis zur Erhöhung des Materialaufwandes steht.

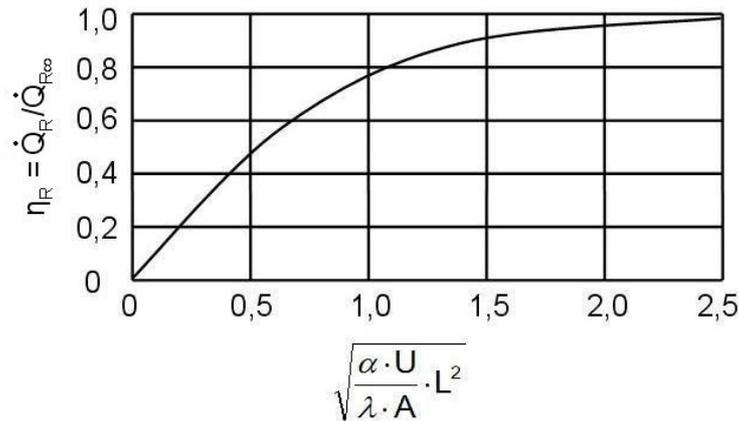


Bild 2-7: Übertragener Wärmestrom bei der Rippe in Abhängigkeit von ihrer Länge

Das Verhältnis Umfang zu Querschnitt hängt von der geometrischen Form der Rippe ab. Bei einer rechteckigen Rippe mit der Breite B und der Dicke s_R gilt

$$U_R = 2 \cdot B + 2 \cdot s_R \quad (2-61)$$

$$A_R = b \cdot s_R$$

Daraus folgt

$$\frac{U_R}{A_R} = \frac{2}{s_R} \cdot \left(1 + \frac{s_R}{B} \right) \quad (2-62)$$

Im Allgemeinen sind Rippen dünn, so dass die Breite um eine Vielfaches größer als die Dicke ist. Daher kann näherungsweise

$$\frac{U_R}{A_R} \approx \frac{2}{s_R} \quad (2-63)$$

gesetzt werden. Bei zylinderförmigen Rippen mit dem Durchmesser d_R gilt entsprechend

$$\frac{U_R}{A_R} (\text{Zyl}) = \frac{4}{d_R} \quad (2-64)$$

Für eine rechteckige Rippe erhält man aus den Gleichungen (2-58) und (2-60) mit Gleichung (2-63) für den Wärmestrom

$$\dot{Q}_R = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_u) \cdot A_R \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 2}{\alpha \cdot s_R}} \cdot \eta_R \quad (2-65)$$

und für die Wärmestromdichte

$$\dot{q}_R = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_u) \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 2}{\alpha \cdot s_R}} \cdot \eta_R \quad (2-66)$$

mit dem Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \tanh \cdot \sqrt{\frac{\alpha \cdot 2}{\lambda \cdot s_R}} \cdot L^2 \quad (2-67)$$

Die Wärmestromdichte einer Rippe ist also umso höher je dünner diese ist. Je kleiner die Dicke ist umso länger muss die Rippe sein um einen hohen Wirkungsgrad zu erhalten. Folglich sind Rippen von Hochleistungskühlern, wie beispielsweise bei Kraftfahrzeugen und Motorrädern, lamellenförmig ausgebildet.

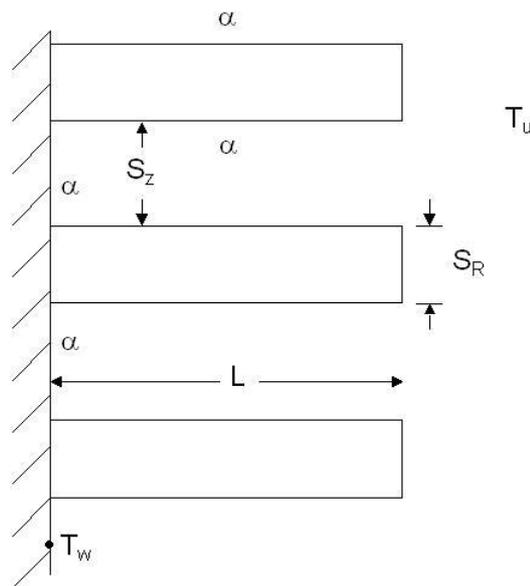


Bild 2-8: Ebene Wand mit Rechteckrippen

Der gesamt von einer berippten Fläche (siehe Bild 2-8) abgegebene Wärmestrom setzt sich näherungsweise zusammen aus den Wärmestrom der unberippten Fläche A_z und dem Wärmestrom der Rippen

$$\dot{Q} = \dot{q}_0 \cdot A_z + \dot{Q}_R, \quad (2-68)$$

wobei

$$\dot{q}_0 = \alpha \cdot (T_{x=0} - T_u)$$

die Wärmestromdichte der unberippten Wand ist. Der Abstand der Rippen s_z muss stets so groß sein, dass die Strömung zwischen diesen nicht behindert wird. Man kann dann annehmen, dass die Überströmung der freien Oberfläche und der Rippen gleich ist und dass somit auch deren Wärmeübergangskoeffizienten gleich sind. Für die Wärmestromdichte einer berippten Wand folgt damit

$$\frac{\dot{q}}{q_0} = \frac{s_z}{s_z + s_R} + \frac{s_R}{s_z + s_R} \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 2}{\alpha \cdot s_R}} \cdot \eta_R, \quad (2-69)$$

wobei die relativen Verhältnisse der Dicken den relativen Flächenverhältnissen entsprechen. Man erkennt hieraus, dass die Verstärkung des Wärmestroms durch die Rippe umso wirkungsvoller ist, je niedriger der Wärmeübergangskoeffizient ist.

Rippen werden oft mit Querschnittsflächen gebaut, die sich mit der Länge x verringern, wie z. B. bei trapezförmigen Formen. In diesem Fall muss wegen $A = f(x)$ die Gleichung (2-48) partiell abgeleitet werden. Die Dgl (2-51) ist dann entsprechend komplizierter und muss in der Regel numerisch integriert werden.

Auf entsprechende Weise kann man für ein weiteres Anwendungsbeispiel berechnen, wie tief ein Messfühler in ein homogenes Fluid eingetaucht werden muss, damit der Messfehler durch die Wärmeübertragung über seine Anschlussleitungen nicht zu groß wird.

Ein Mantelthermoelement mit dem konstanten Querschnitt A und dem konstanten Umfang U ragt auf einer Länge L in ein Fluid hinein, wie es im Bild 2-9 veranschaulicht ist.

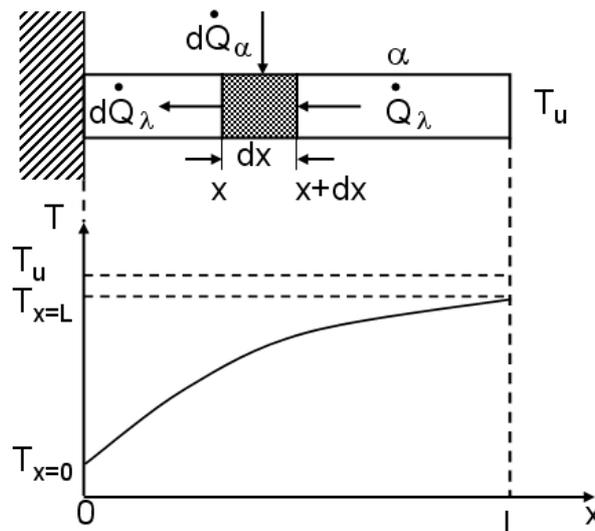


Bild 2-9: Bilanz und Temperaturverlauf beim Thermoelement

Die gemessene Temperatur $T_{x=L}$ an der Spitze des Elementes soll von der zu bestimmenden Fluidtemperatur T_u nur um einen kleinen Wert δ abweichen

$$T_u - T_{x=L} = \delta. \quad (2-70)$$

Bezieht man alle Größen auf die Temperaturdifferenz $T_u - T_{x=0}$, wobei $T_{x=0}$ die Temperatur des Elementes an der Wand ist, so gilt für den sogenannten Wärmeleitfehler

$$\Delta\theta = \frac{\delta}{T_u - T_{x=0}} \quad (2-71)$$

nach Gleichung (2-47)

$$\Delta\theta = \frac{T_{x=L} - T_u}{T_{x=0} - T_u} = \frac{1}{\cosh\left[\sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}} \cdot L\right]} \quad (2-72)$$

Dieser Zusammenhang zwischen dem Messfehler und der Eintauchtiefe des Thermoelementes ist im Bild 2-10 grafisch dargestellt.

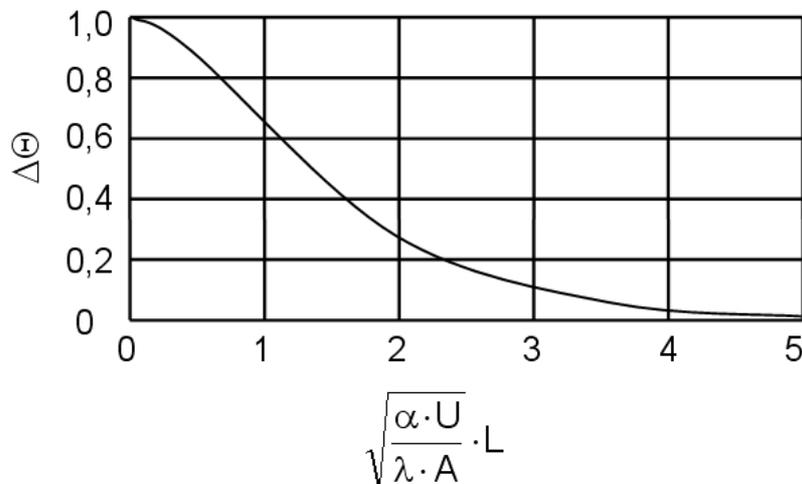


Bild 2-10: Messfehler des Thermoelementes in Abhängigkeit von seiner Eintauchtiefe im Fluid

Beispiel 2-5: Rippenwirkung

Ein Plattenwärmeübertrager zur Kühlung von Thermalöl wird auf der kalten Seite mit Luft angeströmt, wobei sich ein Wärmeübergangskoeffizient von $50 \text{ W/m}^2/\text{K}$ einstellt. Zur Intensivierung der Wärmeabfuhr werden Rippen aus Stahl angebracht.

- a) Der Abstand der Rippen soll 2 cm nicht unterschreiten. Als Rippendicke werden 2 mm gewählt. Um welchen Faktor lässt sich die Wärmestromdichte erhöhen?

Der Wärmeleitkoeffizient von Stahl beträgt etwa $50 \text{ W/m}^2/\text{K}$. Der Wirkungsgrad wird zu 80 % gewählt. Damit ergibt sich aus Gleichung (2-69)

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} = \frac{20}{20+2} + \frac{2}{20+2} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 2}{50 \cdot 0,002}} \cdot 0,8 = 0,91 + 2,30 = 3,2.$$

Die Wärmestromdichte wird also etwa um den Faktor 3 erhöht. Für die hierzu benötigte Länge der Rippe folgt aus Bild 2-7 für $\eta_R = 0,8$

$$\sqrt{\frac{\alpha \cdot 2}{\lambda \cdot s_R}} \cdot L^2 \approx 1.$$

Hieraus erhält man

$$L = \sqrt{\frac{\lambda \cdot s_R}{\alpha \cdot 2}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 0,002}{50 \cdot 2}} = 0,032 = 32 \text{ mm}.$$

Das Verhältnis Länge zu Dicke beträgt also

$$\frac{L}{s_R} = \frac{32}{2} = 16.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass Rippen relativ lang sein müssen.

- b) Welche Verstärkung würde man erreichen, falls durch strömungstechnische Maßnahmen der Abstand der Rippe auf 10 mm verkleinert werden könnte bei einem gleich bleibenden Wirkungsgrad von 80 %?

Aus Gleichung (2-69) folgt nun

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} = \frac{10}{10+2} + \frac{2}{10+2} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 2}{50 \cdot 0,002}} \cdot 0,8 = 0,83 + 4,22 \approx 5,0.$$

Die Wärmestromdichte würde also um den Faktor 5 erhöht. Hierdurch ist ersichtlich, dass Rippen einen möglichst geringen Abstand besitzen sollten.

- c) Um welchen Faktor würde der Wärmestrom durch die Rippen erhöht, falls der Wärmeübergangskoeffizient nur 20 W/m²/K betragen würde?

Aus Gleichung (2-69) ergibt sich jetzt

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} = \frac{20}{20+2} + \frac{2}{20+2} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 2}{20 \cdot 0,002}} \cdot 0,8 = 0,91 + 3,64 = 4,5.$$

Die Wirkung einer Rippe ist also bei einem geringeren Wärmeübergangskoeffizienten stärker. Die Länge beträgt jetzt

$$L = \sqrt{\frac{50 \cdot 0,002}{20 \cdot 2}} \approx 50 \text{ mm}.$$

Die stärkere Wirkung muss mit einer größeren Länge und damit größerem Materialaufwand erkauft werden.

- d) Für welche Dicke der Rippe erreicht die Wärmestromdichte den maximalen Wert? Wie verändert sich dadurch die Menge des Materials für die Rippen?

Zur Ermittlung des Maximums muss die Ableitung der Wärmestromdichte (Gleichung (2-69)) nach der Rippendicke zu null gesetzt werden

$$\frac{d\dot{q}/q_0}{ds_R} = 0 = -\frac{s_Z}{(s_Z + s_R)^2} - \frac{1}{(s_Z + s_R)^2} \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 2 \cdot s_R}{\alpha}} \cdot \eta_R + \frac{0,5 \cdot s_R^{-1/2}}{s_Z + s_R} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{\alpha}} \cdot \eta_R.$$

Durch Umformung erhält man

$$\frac{s_R}{s_Z} = 1 + \frac{\alpha \cdot s_Z}{\lambda \cdot \eta_R^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha \cdot s_Z}{\lambda \cdot \eta_R^2}\right)^2 - 1}.$$

Es ergibt sich

$$\frac{s_{R \max}}{s_Z} = 0,78 \quad \Rightarrow \quad s_{R \max} = 16 \text{ mm}.$$

Damit folgt für die Verstärkung der Kühlwirkung

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} = \frac{20}{20+16} + \frac{16}{20+16} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 2}{50 \cdot 0,016}} \cdot 0,8 = 0,56 + 3,95 \approx 4,5.$$

Die Länge muss auf

$$L = \sqrt{\frac{50 \cdot 0,016}{50 \cdot 2}} \approx 90 \text{ mm}$$

erhöht werden.

Für das Verhältnis der Volumina der beiden Rippendicken von 2 mm und 16 mm gilt

$$\frac{V_{16}}{V_2} = \frac{L_{16}}{L_2} \cdot \frac{s_{R16}}{s_{R2}} \cdot \frac{n_{16}}{n_2},$$

wobei der Index die Rippe kennzeichnet und n die Anzahl der benötigten Rippen ist. Für dieses Verhältnis erhält man (A Fläche der gesamten Wand)

$$A = n_2 \cdot (s_Z + s_{R2}) = n_{16} \cdot (s_Z + s_{R16}).$$

Damit ergibt sich für das Volumenverhältnis

$$\frac{V_{16}}{V_2} = \frac{90}{32} \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{20+2}{20+16} \approx 14.$$

Die Erhöhung der Wärmestromdichte durch die dickeren Rippen um 50 % muss also mit einem 14fach höheren Materialaufwand erkauft werden, was sicherlich nicht wirtschaftlich ist. Mit diesem Beispiel soll verdeutlicht werden, dass die Wärmestromdichte hinsichtlich Materialaufwand und damit auch Gewicht optimiert werden muss. Da die Länge und die Dicke der Rippe auch im Wirkungsgrad enthalten ist, kann eine solche Optimierung nur numerisch durchgeführt werden.

Beispiel 2-6: Messfehler Thermoelement

Die Rauchgastemperatur in der Abzugsleitung eines Konverters soll mit einem Thermoelement gemessen, das durch die feuerfest ausgekleidete Wand 5 cm tief in die Strömung ragt. Das Rohr mit dem Thermoelement hat einen Durchmesser von 4 mm. Das Thermoelement zeigt eine Temperatur von 1200 °C an. Die Wandtemperatur beträgt etwa 1000 °C.

a) Schätzen sie die tatsächliche Gastemperatur ab.

Der Wärmeübergangskoeffizient durch Strahlung und Konvektion wird zu 80 W/m²/K abgeschätzt. Die Wärmeleitfähigkeit von hochhitzebeständigem Stahl beträgt etwa 20 W/m/K. Das Verhältnis U/A bei Rohren ist 4/d. Damit ergibt sich

$$\sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}} \cdot L = \sqrt{\frac{\alpha \cdot 4}{\lambda \cdot d}} \cdot L = \sqrt{\frac{80 \cdot 4}{20 \cdot 0,004}} \cdot 0,05 \approx 3,1.$$

Damit folgt aus Bild 2-10 als relativer Fehler 10 %. Die Gastemperatur wird also um etwa 20 K zu niedrig angezeigt.

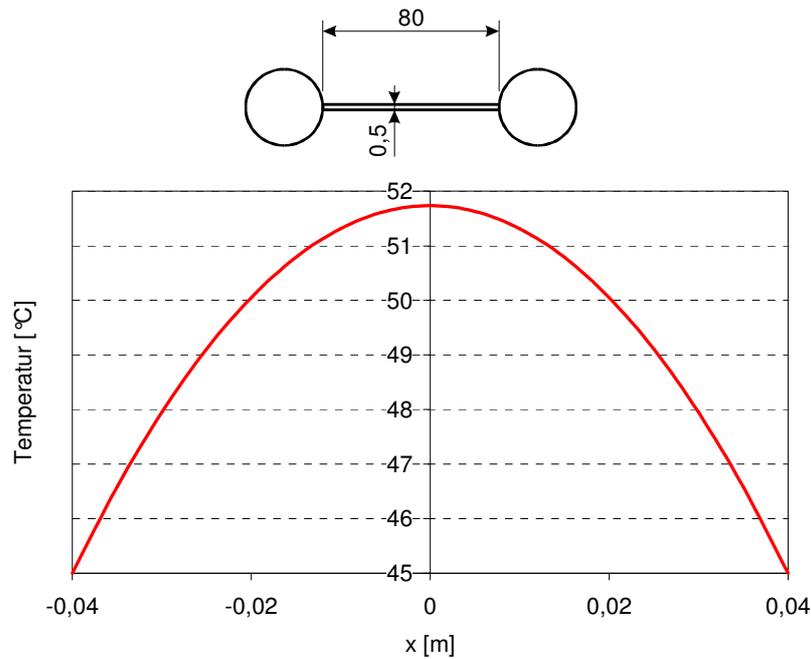
b) Wie könnte man die Messgenauigkeit erhöhen?

Dazu müsste, soweit möglich, das Thermoelement tiefer in die Gasströmung ragen und der Durchmesser des Rohres mit dem Thermoelement verringert werden. Würde man das Thermoelement mit 10 cm doppelt soweit in die Strömung ragen lassen, so würde der Fehler bereits vernachlässigbar klein werden.

Beispiel 2-7: Sonnenkollektor

In den Rohren eines Sonnenkollektors strömt ein Wärmeträgermedium mit einer nahezu konstanten Temperatur von $T_K = 45$ °C. Berechnen Sie die maximale Temperatur auf der Absorptionsfläche ($\lambda = 95$ W/m/K) zwischen zwei Rohren!

Der Absorptionskörper ist $s = 0,5$ mm dick. Der Abstand zwischen den zwei Rohren beträgt $L = 80$ mm. Die Energiestromdichte der Sonnenstrahlung kann mit $\dot{q} = 400$ W/m² angenommen werden, wobei Verluste bereits berücksichtigt sind.



Skizze 2-6: Berechneter Temperaturverlauf des Sonnenkollektors

Der Temperaturverlauf ergibt sich wiederum aus der Energiebilanz für eine differentielle Länge dx . Die absorbierte Sonnenstrahlung ist gleich der Änderung des geleiteten Wärmestroms. Mit der Breite B und der Querschnittsfläche $B \cdot s$ des Sonnenkollektors folgt mit Gleichung (2-49)

$$q \cdot B \cdot dx = -\lambda \cdot B \cdot s \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \cdot dx.$$

Als Randbedingungen gelten

$$T(x = L/2) = T_k \quad \text{und}$$

$$dT/dx(x = 0) = 0.$$

Als Lösung der Dgl

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda \cdot s}$$

erhält man die Parabel

$$T = T_k + \frac{\dot{q}}{2 \cdot \lambda \cdot s} \cdot \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - x^2 \right].$$

Für die maximale Temperatur in der Mitte bei $x = 0$ ergibt sich somit

$$T_{\max} = 45^\circ\text{C} + \frac{400 \text{ W/m}^2}{2 \cdot 95 \text{ W/m/K} \cdot 0,0005 \text{ m}} \cdot 0,04^2 \text{ m}^2 = 51,7^\circ\text{C}.$$

2.7 Leitung mit gleichverteilten Wärmequellen

Beispielsweise von elektrischem Strom durchflossenen Leitern, wie Elektrokabel, Heizstrahler und Graphitelektroden, oder bei Körpern, in denen chemische Reaktionen oder Kernspaltungsprozesse ablaufen, treten über ihr Volumen verteilte Wärmequellen auf. Qualitativ stellt sich dann ein Temperaturverlauf wie im Bild 2-11 ein. Exemplarisch wird im Folgenden der Fall behandelt, dass diese Wärmequellen \dot{w}_q im Volumen des Körpers gleichverteilt und stationär sind. Der Wärmeleitkoeffizient λ wird wiederum als temperaturunabhängig angenommen.

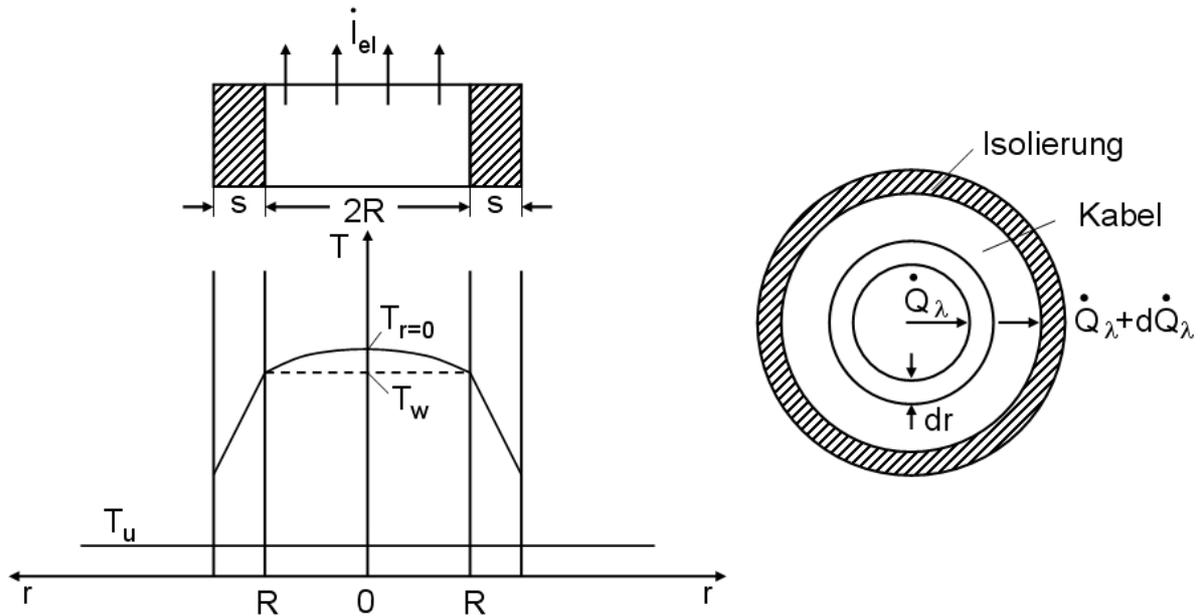


Bild 2-11: Qualitativer Temperaturverlauf in einem elektrischen Kabel

Die im Volumen erzeugte Wärme \dot{w}_q [W/m^3] muss zum Rand hingeleitet werden. Da der Wärmestrom zum Rand stetig höher wird, nimmt folglich auch der Gradient zu. Als differentielle Energiebilanz gilt, dass die Erhöhung des durch die Dicke der Schicht dr geleiteten Wärmestroms gleich der in dieser Schicht erzeugten Wärme ist

$$d\dot{Q}_\lambda = \dot{w}_q \cdot A(r) \cdot dr \quad (2-73)$$

wobei A die bei Zylindern und Kugeln vom Radius abhängige Mantelfläche bedeutet. Mit dem FOURIERSchen Wärmeleitansatz erhält man

$$\frac{d}{dr} [-\lambda \cdot A(r)] \cdot \frac{dT}{dr} = \dot{w}_q \cdot A(r). \quad (2-74)$$

Durch partielle Differentiation ergibt sich

$$\lambda \cdot \frac{d^2 T}{dr^2} + \lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dr} + \dot{w}_q = 0. \quad (2-75)$$

Mit den Flächen

$$\begin{aligned}
 A &= B \cdot L = \text{konstant} && \text{(Platte)} && (2-76) \\
 A &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L && \text{(Zylinder)} \\
 A &= 4 \cdot \pi \cdot r^2 && \text{(Kugel)}
 \end{aligned}$$

folgt als Dgl

$$\lambda \cdot \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{b-1}{r} \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dr} + \dot{w}_q = 0 \quad (2-77)$$

mit dem Formfaktor

$$\begin{aligned}
 b &= 1 \quad \text{für Platte} && (2-78) \\
 b &= 2 \quad \text{für Zylinder} \\
 b &= 3 \quad \text{für Kugel.}
 \end{aligned}$$

Als Randbedingungen gelten am Rand

$$-\lambda \cdot \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = k \cdot (T_w - T_u) \quad (2-79)$$

und in der Mitte auf Grund der Symmetrie

$$-\lambda \cdot \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (2-80)$$

Hierin ist k der Wärmedurchgangskoeffizient, der sich aus der Wärmeleitung durch die Isolierung (nur bei Elektrokabeln vorhanden) und dem konvektiven Wärmeübergang an die Umgebung zusammensetzt. Als Lösung der Dgl erhält man

$$\frac{\lambda \cdot (T - T_u)}{\dot{w}_q \cdot R^2} = \frac{1}{2 \cdot b} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2 \cdot \lambda}{k \cdot R} \right]. \quad (2-81)$$

Der Temperaturverlauf wird also durch eine nach unten geöffnete quadratische Parabel dargestellt. Vom praktischen Interesse ist zum einen die maximale Temperaturdifferenz im Körper, für die aus der obigen Gleichung

$$T_{r=0} - T_w = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \dot{w}_q \cdot \frac{R^2}{\lambda} \quad (2-82)$$

folgt. Bei Kupferkabeln ist diese Temperaturdifferenz wegen der sehr hohen Wärmeleitfähigkeit und dem relativ geringen Durchmesser in der Regel vernachlässigbar klein. Zum anderen ist die Temperaturdifferenz zwischen der Wand und der Umgebung von Bedeutung, da die Wandtemperatur die Höhe der zulässigen Temperatur des Isoliermaterials nicht überschreiten darf.

Aus Gleichung (2-71) ergibt sich wiederum

$$T_w - T_u = \frac{1}{b} \cdot \dot{w}_q \cdot \frac{R}{k}. \quad (2-83)$$

Je größer die Wärmequelle und der Durchmesser und je niedriger der Wärmedurchgangskoeffizient ist, desto höher ist die sich ergebende Kabeltemperatur.

Für den in einem Stromkabel oder Heizstrahler erzeugten Wärmestrom gilt

$$\dot{Q} = I_{el}^2 \cdot R_{el} = I_{el}^2 \cdot \frac{\rho_{el} \cdot L}{A_q}, \quad (2-84)$$

wobei I_{el} der elektrische Strom, R_{el} der elektrische Widerstand des Kabels, ρ_{el} die elektrische Leitfähigkeit, L und A_q die Länge bzw. der Querschnitt des Kabels bedeuten. Mit dem Volumen $A_q \cdot L$ folgt für die Wärmequellendichte eines Zylinders

$$\dot{w}_q = \frac{\dot{Q}}{V} = I_{el}^2 \cdot \frac{\rho_{el}}{A_q^2} = I_{el}^2 \cdot \frac{\rho_{el}}{\pi^2 \cdot R^4}. \quad (2-85)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (2-83) der Zusammenhang zwischen dem notwendigen Kabeldurchmesser d und der Stromstärke

$$d = \left[\frac{4}{\pi^2} \frac{I_{el}^2 \cdot \rho_{el}}{k \cdot (T_w - T_u)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2-86)$$

Je höher der zulässige elektrische Strom ist, desto dicker muss also ein Elektrokabel sein.

Beispiel 2-8: Heizstrahler

Ein Heizstrahler aus Stahl hat eine Länge von 1,2 m und einen Durchmesser von 8 mm. Er wird mit einer Leistung von 6 kW betrieben.

a) Wie groß ist die Temperaturdifferenz im Querschnitt?

Die Wärmequellendichte beträgt

$$\dot{w}_q = \frac{\dot{Q}}{A_q \cdot L} = \frac{4 \cdot \dot{Q}}{\pi \cdot d^2 \cdot L}.$$

Damit ergibt sich als Temperaturdifferenz im Strahler aus Gleichung (2-65)

$$T_{r=0} - T_w = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \dot{w}_q \cdot \frac{R^2}{\lambda} = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot b \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}.$$

Diese ist somit also unabhängig vom Durchmesser und proportional zur Leistung (Wärmestrom). Als Wärmeleitfähigkeit von Stahl bei hohen Temperaturen gilt näherungsweise 28 W/m/K. Damit folgt

$$T_{r=0} - T_w = \frac{6000}{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,2 \cdot 28} = 14,2 \text{ K.}$$

b) Wie hoch ist die Oberflächentemperatur des Strahlers?

Für den abgestrahlten Wärmestrom gilt

$$\dot{Q} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_w^4 \cdot \pi \cdot d \cdot L,$$

da $T_u \ll T_w$ ist. Als Emissionsgrad der oxidierten Oberflächen kann man 0,7 annehmen. Damit folgt

$$T_w = \left(\frac{6000}{0,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2} \right)^{1/4} = 1496 \text{ K} = 1223 \text{ °C}$$

Beispiel 2-9: *Elektrokabel*

Elektrokabel aus Kupfer sind mit einer Querschnittsfläche von 1,5 mm² je Strang für eine Stromstärke von 16 Ampere und mit 0,75 mm² für 10 Ampere zugelassen. Von welchem Wärmedurchgangskoeffizienten der Isolierung und Verlegung wird dabei ausgegangen, wenn man als maximale Temperaturdifferenz zwischen Kern und Umgebung von 20 K annimmt?

Aus Gleichung (2-86) folgt für den Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{I_{el}^2 \cdot \rho_{el}}{T_w - T_u} \cdot \frac{1}{d^3}.$$

Die zugehörigen Kabeldurchmesser sind 1,38 und 0,97 mm. Die elektrische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt $\rho_{el} = 0,018 \text{ } \Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}$ ($\Omega = \text{V} / \text{A}$, $\text{V} \cdot \text{A} = \text{W}$).

$$k = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{16^2 \cdot \text{A}^2 \cdot 0,018 \text{ } \Omega \cdot 10^{-6} \text{ m}}{20 \text{ K} \cdot 1,38^3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3} = 49 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

und von 0,75 mm²

$$k = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{10^2 \cdot \text{A}^2 \cdot 0,018 \text{ } \Omega \cdot 10^{-6} \text{ m}}{20 \text{ K} \cdot 0,97^3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3} = 54 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$