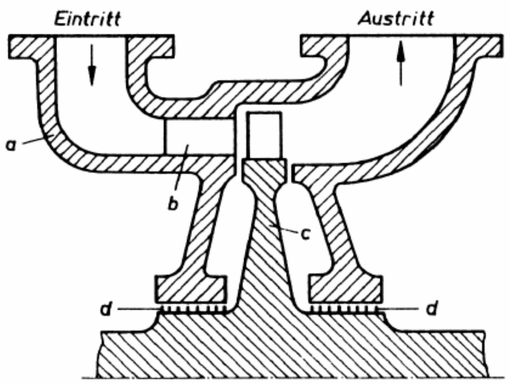
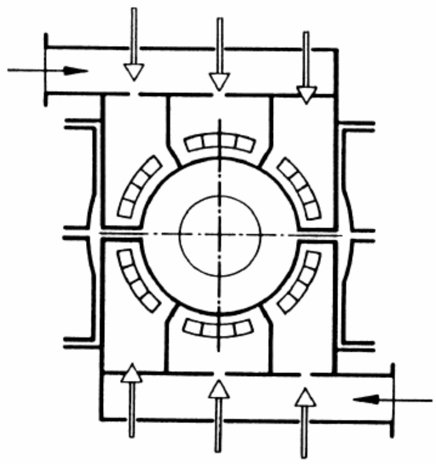
Aufgabe 5.01

Die einstufige Gleichdruckturbine (Lavalturbine)



Schema einer Lavalturbine
a Gehäuse c Läufer
b Leitrad d Labyrinthdichtung

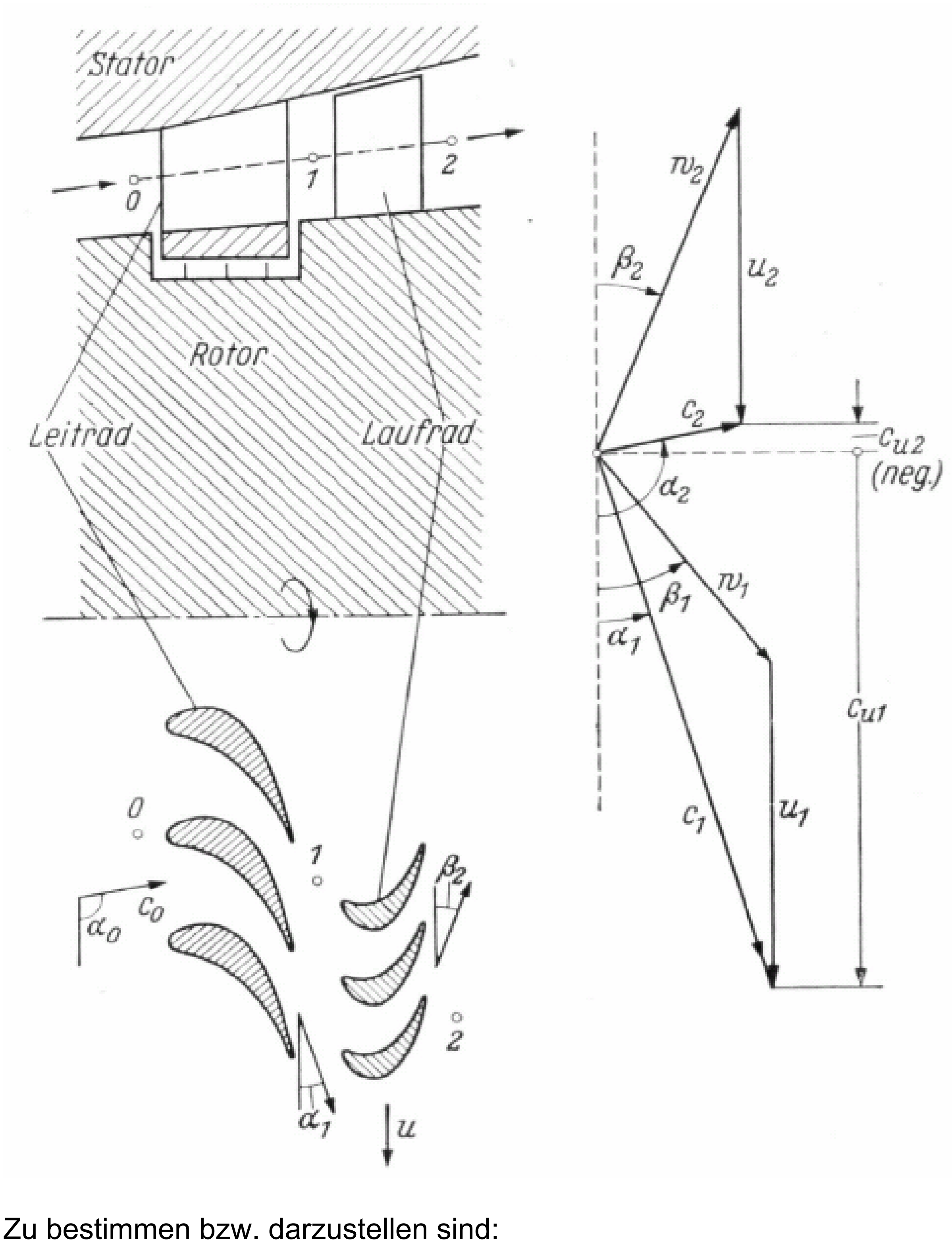


Schema einer Düsengruppenregelung

Für eine einstufige Gleichdruckturbine gelten folgende Daten:

mittlerer Beschaufelungsdurchmesser	D_m	=	0,2 m
Drehzahl	n	=	30.000 min^{-1}
Massendurchsatz	$\dot{m}$	=	2 kg/s
spez. statisches isentropes Enthalpie-gefälle der Stufe	Δh_S	=	- 241 kJ/kg
Zuströmgeschwindigkeit z. Leitrad (Stator)	c_0	=	50 m/s
Düsen- bzw. Leitradwirkungsgrad	η'_S	=	75%
Laufradwirkungsgrad	η''_S	=	80%
Abströmwinkel der Düsen (Stator)	α_1	=	15°
Abströmwinkel der Laufschaufeln (Rotor)	β_2	=	20°
Reaktionsgrad (hier isentrop betrachtet)	r	=	0,05

Die Strömungswinkel werden bei dieser Aufgabe nach Traupel [1], S. 145, gegen die Umfangsebene definiert:



Zu bestimmen bzw. darzustellen sind:

1. Der Expansionsverlauf des Fluids in der Turbine (qualitatives h,s-Diagramm)
2. Die Umfangsgeschwindigkeit u
3. Die Geschwindigkeitsdreiecke am Eintritt und Austritt des Laufrades
4. Die aerodynamische Stufenarbeit und die Leistung der Turbine

Lösung:

1. Qualitativer Druckverlauf (Expansion)

Begründung für den Verlauf:
- Der größte Teil des Enthalpiegefälles wird im Leitrad umgewandelt ($r \cong 0$).
- Für die ideale Gleichdruckturbine gilt $r = 0$, dann wäre $p_2 = p_1$.

Definition/Begriffe:
- Gleichdruckturbine
  - Der Druck vor und hinter dem Laufrad ist (theoretisch) gleich.
  - Das Laufrad besteht aus einem reinen Umlenkgitter, d.h., im Laufrad wird kein Druck abgebaut.
  - $\Delta h_S'' \cong 0$ und der Reaktionsgrad ist nahe Null ($r \cong 0$).

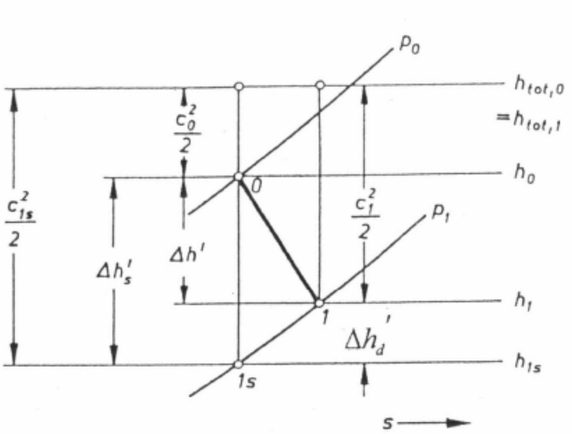
- Kennzeichnungen:
  x´ bezeichnet Größen bzw. Betrachtung des Leitrades (Stator)
  x´´ bezeichnet Größen bzw. Betrachtung des Laufrades (Rotor)

- Isentroper Reaktionsgrad

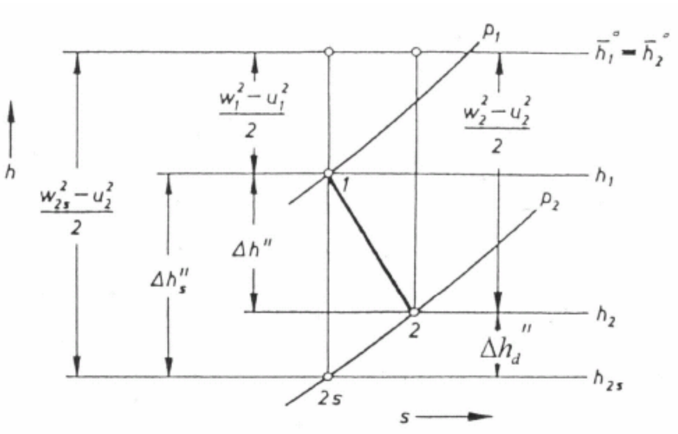
$$r = \frac{\Delta h''}{\Delta h' + \Delta h''} \tag{1}$$

- Isentropes Enthalpiegefälle der Stufe

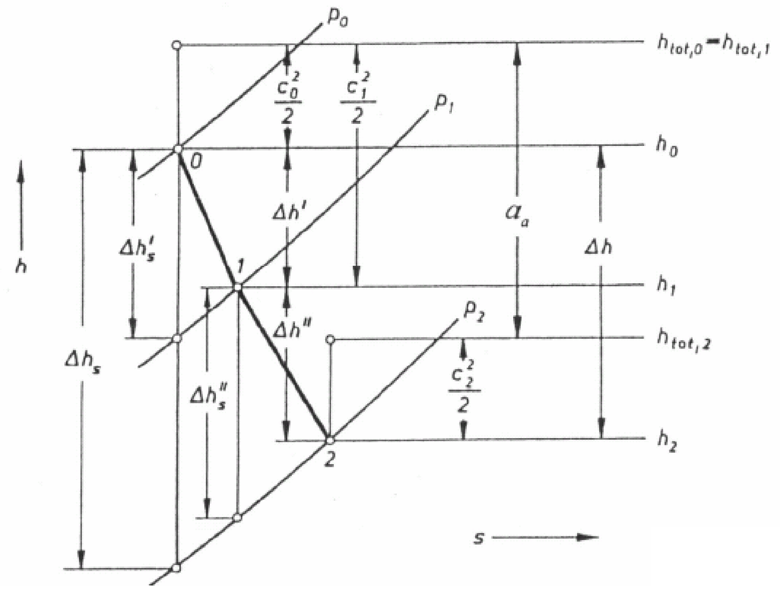
$$\Delta h_S = \Delta h_S' + \Delta h_S'' \tag{2}$$



Enthalpie-Gefälle im Leitrad



Enthalpie-Gefälle im Laufrad



Totalenthalpie $h_{tot} = h^0$

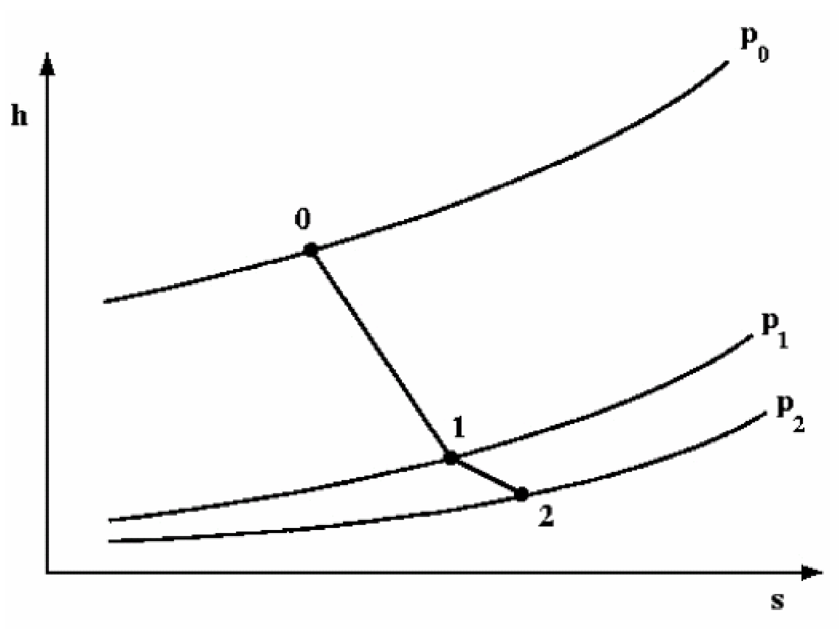
Totalrothalpie $\overline{h}^0$

Enthalpie-Gefälle einer Turbinenstufe

- Winkel werden in dieser Aufgabe (analog zu Traupel) zur Umfangsebene (senkrecht zur Rotationsebene) definiert.
  - α: absolutes System (ortsfest)
  - β: relatives System (rotierend)

- Im Leitrad/Stator (LE) bleibt die Totalenthalpie konstant:
  $h^0_{LE} = \text{const}$ bzw. $\Delta h_{tot} = h_{tot,2} - h_{tot,1} = 0$ (3)

- Im Laufrad /Rotor (LA) bleibt die totale Rothalpie konstant:
  $\overline{h}^0_{LA} = \text{const}$ bzw. $\Delta h_{tot,rot} = h_{tot,rot,2} - h_{tot,rot,1} = 0$ (4)



2. Umfangsgeschwindigkeit

$u = \omega\,(D_m/2)$ mit $\omega = 2\,\pi\,n$ (bei n auf Einheit achten!) (5)

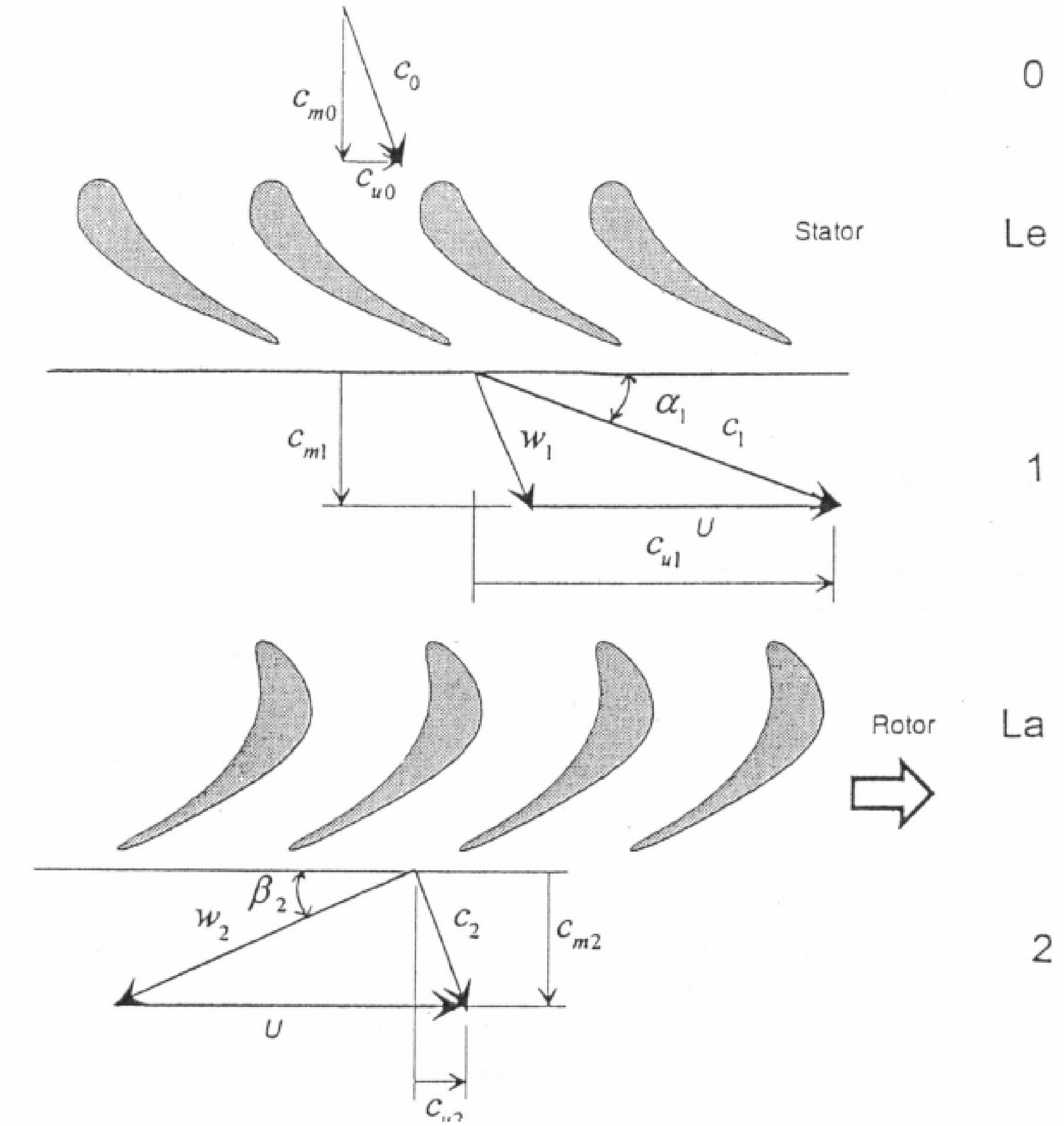
$\omega = 3141{,}6\ s^{-1}$ und $u = 314{,}16\ m/s$ (6)

3. Geschwindigkeitsdreieck für das Laufrad

Annahmen und Vereinfachungen zur Berechnung:

$u_1 = u_2 = u$ (Strömung auf einer Zylinderfläche) (7)

$\alpha_0 = 90°$ (kein Vordrall) (8)



Geschwindigkeitsdreiecke für eine Turbinenstufe

Da hier eine Gleichdruckturbine untersucht wird und darum der Austrittsdruck der Stufe (nach Laufrad) theoretisch gleich dem Eintrittsdruck in das Laufrad ist, darf vereinfacht gesagt werden: mit

$$\Delta h_S = \Delta h_S' + \Delta h_S'' = -241 \text{ kJ/kg} \tag{9}$$

(1), (9):

$$r \approx \frac{\Delta h_S''}{\Delta h_S} \tag{10}$$

folgt:

$$\Delta h_S'' \approx r \cdot \Delta h_S \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h_S'' \approx -12{,}05\,\text{kJ/kg} \tag{11}$$

$$\Delta h_S' \approx \Delta h_S - \Delta h_S'' \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h_S' \approx -228{,}95\,\text{kJ/kg} \tag{12}$$

D.h., der größte Teil des Enthalpiegefälles wird im Leitrad umgewandelt (Beleg für die qualitative Darstellung unter 1).

Leitrad:

Die Energiebilanz des Leitrades kann wie folgt dargestellt werden:

$$a + \dot{q} = \Delta h + \frac{\Delta\left(c^2\right)}{2} + g\,z \tag{13}$$

Im Leitrad ist die spezifische Arbeit *a* gleich Null.
Das System wird als adiabat angenommen ($\dot{q} = 0$) und der Term $g\,z$ ist ebenfalls zu vernachlässigen. Dann ergibt sich:

$$0 = \Delta h_{tot} = \Delta h + \frac{\Delta c^2}{2} = h_{tot,1} - h_{tot,0} = \underbrace{h_1 - h_0}_{\Delta h'} + \frac{c_1^2 - c_0^2}{2} \tag{14}$$

und mit

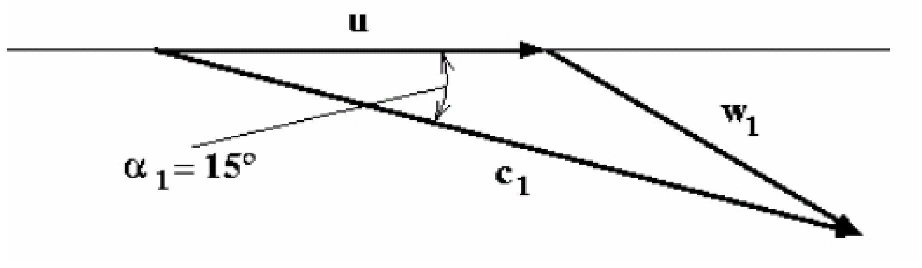
$$\Delta h' = \eta'_S \cdot \Delta h'_S \tag{15}$$

folgt:

$$c_1 = \sqrt{-2\Delta h' + c_0^2} = \sqrt{-2\eta'_S\,\Delta h'_S + c_0^2} = 588{,}15\,\text{m/s} \tag{16}$$

Über den Kosinussatz findet man:

$$w_1 = \sqrt{u^2 + c_1^2 - 2u\,c_1 \cdot \cos\alpha_1} = 296{,}08\,\text{m/s} \tag{17}$$



Laufrad:

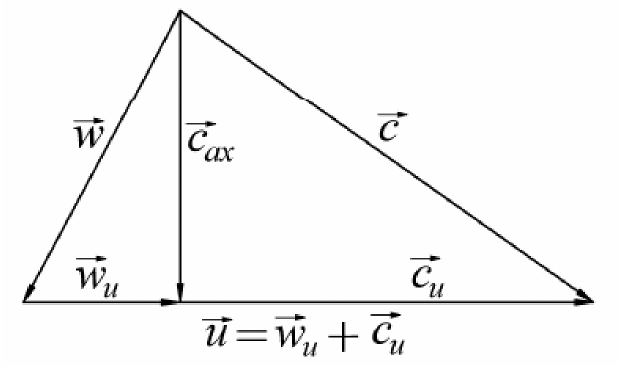
Im Laufrad ist die Totalenthalpie nicht konstant, da hier Arbeit verrichtet wird. In diesem Fall errechnet sich die Totalenthalpie aus der Eulergleichung:

$$\Delta h_{tot} = h_{tot,\,2} - h_{tot,\,1} = c_{u2}\, u_2 - c_{u1}\, u_1 \tag{18}$$

Im Laufrad, also im rotierenden System, bleibt die totale Rothalpie (Äquivalent zur Totalenthalpie des ortsfesten Systems) constant.

$$\Delta h_{rot} = h_{rot,\,2} - h_{rot,1} = 0 = (h_{tot,\,2} - c_{u2}\, u_2) - (h_{tot,\,1} - c_{u1}\, u_1) \tag{19}$$

Die Rothalpie ist die Totalenthalpie minus der geleisteten Arbeit.



Das Produkt $c_u u$ lässt sich durch Ausnutzung der Identitäten im Geschwindigkeitsdreieck folgendermaßen bestimmen:

$$c_{ax}^2 = c^2 - c_u^2 = w^2 - w_u^2 = w^2 - (u - c_u)^2 \quad \rightarrow$$

$$c^2 - c_u^2 = w^2 - (u^2 - 2uc_u + c_u^2) \quad \rightarrow$$

$$u \cdot c_U = \frac{c^2 - w^2 + u^2}{2} \tag{20}$$

Daraus folgt die Rothalpie :

$$\Delta h_{tot,rot} = \left(h_{tot,2} - c_{u2}\, u_2\right) - \left(h_{tot,1} - c_{u1}\, u_1\right)$$

$$= \left(h_{tot,2} - h_{tot,1}\right) - \left(c_{u2}\, u_2 - c_{u1}\, u_1\right)$$

$$= \left[\left(h_2'' + \frac{c_2^{\,2}}{2}\right) - \left(h_1'' + \frac{c_1^{\,2}}{2}\right)\right] - \left[\frac{c_2^{\,2} - w_2^{\,2} + u_2^{\,2}}{2} - \frac{c_1^{\,2} - w_1^{\,2} + u_1^{\,2}}{2}\right]$$

$$= \left(h_2'' + \frac{w_2^{\,2} - u_2^{\,2}}{2}\right) - \left(h_1'' + \frac{w_1^{\,2} - u_1^{\,2}}{2}\right) \tag{21}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = u_1 = u$ Gl.(7), da der Strömungskanal vereinfacht als zylindrisch angenommen werden soll.

$$h_2'' - h_1'' = \Delta h'' = \eta_S'' \Delta h_S'' \qquad (22)$$

(19), (21):

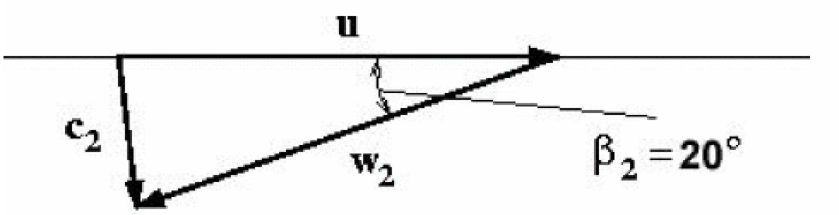
$$h_2'' + \frac{w_2^2 - u_2^2}{2} = h_1'' + \frac{w_1^2 - u_1^2}{2} \qquad (23)$$

(22), (23), (7):

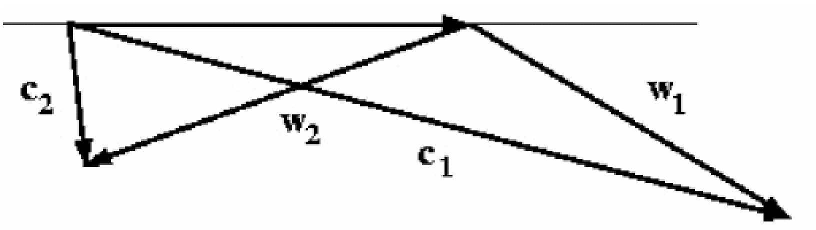
$$h_2'' - h_1'' = \Delta h'' = \eta_S'' \Delta h_S'' = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad \Rightarrow \qquad (24)$$

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 - 2\eta_S'' \Delta h_S''} \approx 327{,}02\,\mathrm{m/s} \qquad (25)$$

$$c_2 = \sqrt{u^2 + w_2^2 - 2u\,w_2 \cos\beta_2} \approx 112{,}06\,\mathrm{m/s} \qquad (26)$$



Das vollständige Geschwindigkeitsdreieck für das Laufrad ergibt sich zu



4. Aerodynamische Stufenarbeit a_a:

Aus dem h,s-Diagramm lässt sich ablesen: $a_a = h_{tot,\,2} - h_{tot,\,0}$. Weil die Totalenthalpie im Leitrad theoretisch konstant bleibt ($h_{tot,\,1} = h_{tot,\,0}$), folgt

$$a_a = \Delta h_{tot} = h_{tot,\,2} - h_{tot,\,0} = (h_{tot,\,2} - h_{tot,\,1}) + (h_{tot,\,1} - h_{tot,\,0})$$

(14): $\quad = h_{tot,\,2} - h_{tot,\,1}$

(18): $\quad = c_{u2}\,u_2 - c_{u1}\,u_1 \qquad (27)$

(27), (20):

$$a_a = \frac{\left(c_2{}^2 - c_1{}^2\right) - \left(w_2{}^2 - w_1{}^2\right) + \left(u_2{}^2 - u_1{}^2\right)}{2} \tag{28}$$

(abgeleitete Form der Eulerschen Turbinenhauptgleichung)

Mit $u_2 = u_1$, und (7) ergibt sich:

$$a_a \approx -176{,}32\,\mathrm{kJ/kg} \tag{29}$$

$$\dot{W} \approx \dot{m}\,a_a \approx -352{,}64\,\mathrm{kW} \tag{30}$$

Literatur:

[1] Traupel, W.: Thermische Turbomaschinen. Erster Band, 3. Auflage, Springer, 1977