OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

VST

FAKULTÄT FÜR VERFAHRENS- UND SYSTEMTECHNIK

Signalverarbeitung - Filterung, PSD, Korrelationen

Messtechnik Vorlesung

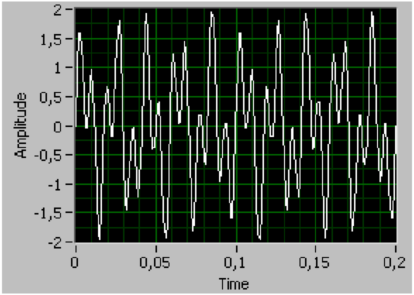
9. Dezember 2010

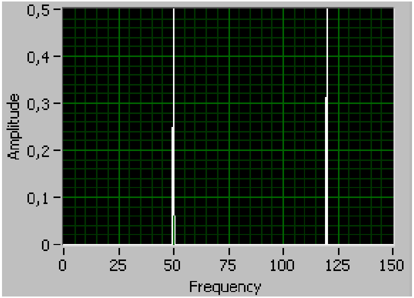
OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG
VST FAKULTÄT FÜR VERFAHRENS- UND SYSTEMTECHNIK

Zurück zur Schnellen Fourier-Transformation (FFT)

Ein FFT-Beispiel mit zwei sich überlagernden Sinusfunktionen

- Im Zeitbereich
- und im Frequenzbereich





Filterung

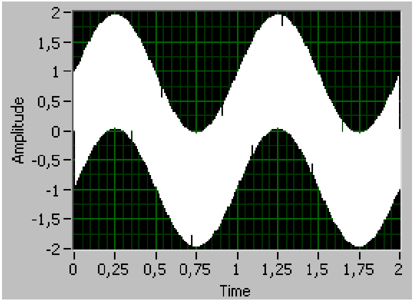
Einführung

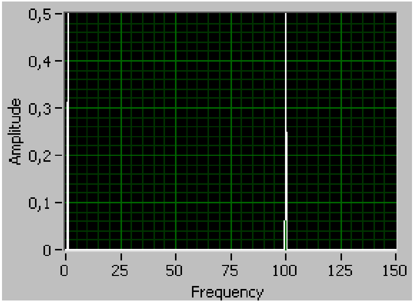
- Eine der nützlichsten Anwendungen der FFT is die Filterung
- Man kann frei entscheiden, welcher Frequenzbereich ausgefiltert werden soll!
- Typisch verwendet man einen Tiefpassfilter, um das experimentelle Rauschen zu entfernen.
- Normalerweise gibt es Rauschen immer bei höheren Frequenzen.
- In unserem ersten Beispiel, betrachten wir das Signal mit 100 Hz als Rauschen und das mit 1 Hz soll abgetastet werden.

Vorbereitung der Filterung

Änderung der Frequenz der Signale (1/100 Hz)

- Sodass die zwei Frequenzen gut getrennt sind (Faktor 100).
- Die geänderten Signale sehen jetzt so aus:



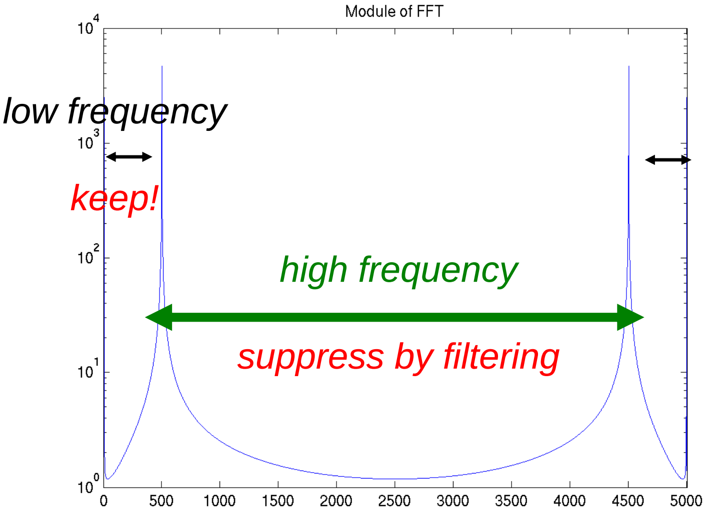


Filterung

Funktionsweise

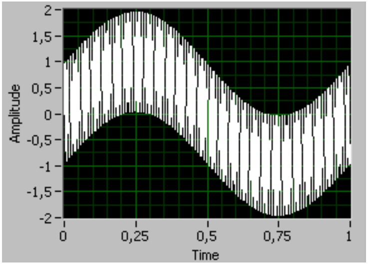
- Um das Signal bei einer bestimmten Frequenz zu filtern, muss der entsprechende Teil der DFT $H(f)$ auf 0 gesetzt werden.
- Die DFT ist aber imaginär.
- Deswegen muss natürlich sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil auf 0 gesetzt werden.
- entweder getrennt (*HR* und *HI*)
- oder beide zusammen (*H*)

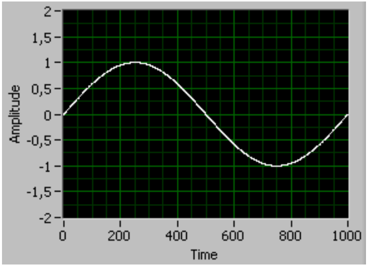
Filterung - $H(t)$



Beispiel in LabVIEW

1. Der richtige Bereich muss ausgewählt werden (wir filtern alles von 50 Hz bis zur Nyquistfrequenz)
2. Die cut-off Frequenz wird mit Variablen eingegeben.
3. Der entsprechende Teil der DFT wird auf 0 gesetzt.
4. Die inverse FFT (iFFT) wird berechnet.
5. Das gefilterte Signal wird mit dem Originalsignal verglichen.





Filterung von Rauschen

- Bis jetzt haben wir nur bestimmte Frequenzen betrachtet.
- In der Praxis müssen wir aber (zufälliges) Rauschen filtern.
- Ist Filterung immer noch wirksam?

Beispiel

- Wir betrachten jetzt ein Signal entstehend aus der Superposition einer Sinuswelle mit einer Frequrenz von 1 Hz (Amplitude=A1) und eines zufälligen Rauschen (Amplitude=A2)
- Unterschiedliche cut-off Frequenzen werden getestet, von 50 bis zu 2 Hz
- Verschiedene Amplituden werden getestet (SRV 30. . .0)
- Beobachtungen?

Spektrale Energiedichte (ESD)

Die Spektrale Energiedichte beschreibt, wie sich die Energie eines Signals auf den Frequenzbereich verteilt. Es ist nichts anderes als das Quadrat der Größe der FT.

$$ESD(f) = H(f)H^*(f) = |H(f)|^2 \tag{1}$$

Ist der globale Mittelwert eines Signals nicht 0, geht die ESD für lange Reihen gegen unendlich.

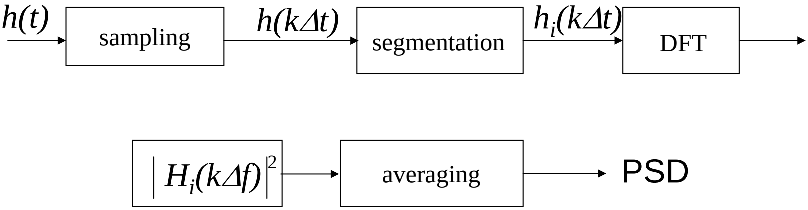
$$\lim_{N \to +\infty} ESD = +\infty \tag{2}$$

In solchen Fällen ist es sogar unmöglich die DFT zu berechnen.

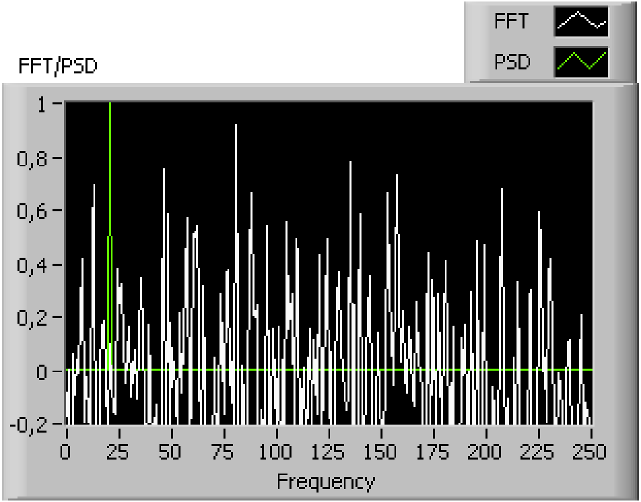
Spektrale Leistungsdichte (PSD)

Alternativ kann die Spektrale Leistungsdichte (PSD) berechnet werden.

Die PSD-Berechnung verwendet eine überlappende Segmentation (Unterteilung) des Originalsignals, gefolgt von einer entsprechenden DFT-Berechnung und schließlich die Rekonstruktion mittels Mittelung.



Beispiel für PSD



Korrelation

Einführung

- Es ist häufig notwendig die **Korrelation zwischen zwei Signalen zu bestimmen**
- Das bedeutet: «wie ähnlich sind die Signale, auf einer quantitativen Weise?»
- Die DFT kann sehr wirksam verwendet werden um die Korrelation festzustellen, basierend auf der Frequenzanalyse.
- und zwar wegen der mathematischen Eigenschaft:
  - DFT(Korrelation zwischen $h(t)$ und $g(t)$)$=N\ H^*(f)G(f)$
- Das bedeutet: die DFT der Korrelation ist das Produkt der DFTs der beiden Signale multipliziert mit der Länge des Signals (N)
- Konsequenz: es reicht die einzelne DFTs zu berechnen um die Korrelation zu bestimmen!

Normalisierung der Korrelation

Definition

- Offensichtlich, die bestmögliche Korrelation bekommt man bei zwei identischen Signalen
- Die allgemeine Gleichung liefert in diesem Fall:
  - DFT(Korrelation zwischen $h(t)$ und $h(t)$)=$N\ H^*(f)H(f) = N|H(f)|^2$
- Konsequenz: die Definition der normalisierten Korrelation (Werte zwischen -1 und 1, wobei 0=keine Korrelation) zwischen einer bekannten, Referenzfunktion $h(t)$ und eine Testfunktion $g(t)$ wird:

$$\mathrm{Korr}(h(t), g(t)) = \mathrm{iDFT}\left(\frac{H^*(f)G(f)}{(|H(f)||G(f)|)}\right) \tag{3}$$

Beispiele in LabVIEW

mit den folgenden Funktionen

- $g = h$
- $g = -h$
- $g = 2h$
- $g = 2h + 13$
- $g = (5 - 2h)^2$
- $g = 1$
- $g = h+$ Rauschen

Alternativ kann ein Koeffizient r auch bestimmt werden ($r \in [-1, 1]$)

- 0 - keine Korrelation,
- 1, -1: komplette Korrelation.

Wavelet - Einführung 1/2

- Wavelet wurde in der 50er definiert
- als eine Ergänzung zur klassischen Fourier-Analyse
- Warum soll die Fourier-Analyse überhaupt erweitert werden?

- Nachteil der FFT: die Zeitinformation geht komplett verloren
- → es ist unmöglich zu sagen, wann ein Ereignis passiert ist.
- Eine Wahl muss getroffen werden: entweder Zeit oder Frequenz

Wavelet - Einführung 1/2

- Wenn das Signal in der Zeit sich nicht ändert (stationär), ist es kein Problem!
- Bis jetzt war das bei uns immer der Fall.
- Also die meisten einfachen und sogar 50% der komplexeren Anwendungen werden damit abgedeckt.
- Aber, wenn die zeitlichen Änderungen wichtig werden und die Signale nicht mehr mit FFT analysiert werden können:
  - Signale mit Drift
  - monoton zu-/abnehmende Signale
  - Signale mit plötzlichen Änderungen
- Dann müssen die zeitlichen Änderungen berücksichtigt werden!

Short-time Fourier-Analyse

- Um das Problem zu lösen, hat D. Gabor die STFT eingeführt
- Es ist eine einfache DFT mit Fensterung des Signals
- Die Fensterfunktion hat eine konstante Breite

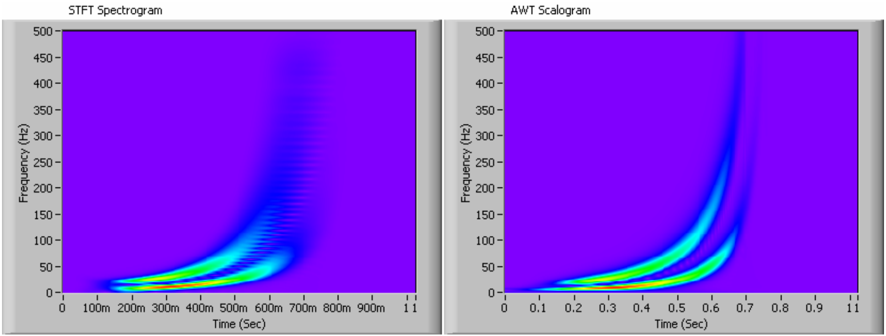
- Ergebnis in sowohl Frequenz- als auch in Zeitbereich! ☺
- Begrenzte Auflösung in beiden Dimensionen. ☹

Wavelet-Analyse

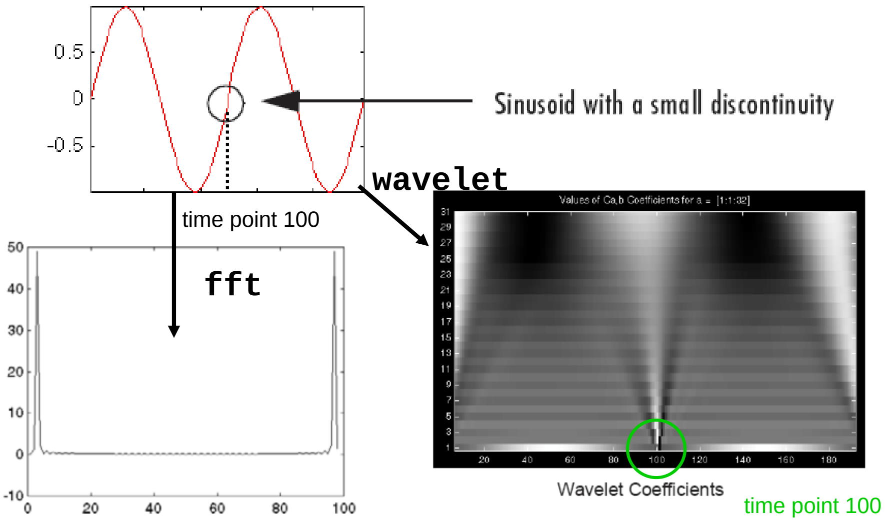
- Die Wavelet-Analyse führt eine variable Fenstergröße ein.
  - Lange Fenstergröße → niederfreqente Information
  - kürzere → hochfrequente Information

- Ergebnis in Frequenz- (oder Skala) und Zeitbereich! ☺
- Mit einer optimierten Fenstergröße ☺

STFT vs. Wavelet

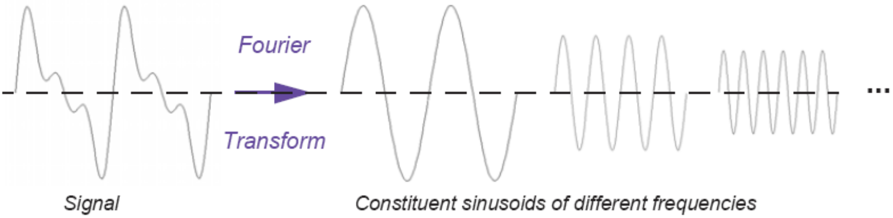


Vorteile


Sinusoid with a small discontinuity
time point 100
fft
wavelet
Values of Ca,b Coefficients for a = [1:1:32]
Wavelet Coefficients
time point 100

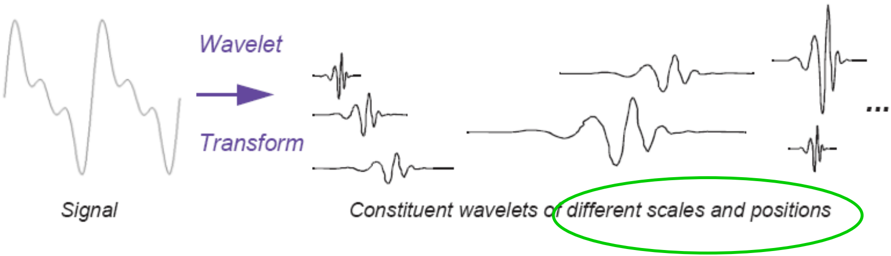
FFT vs. Wavelet 1/2

- Die Fourier Analyse zerlegt die Signale in Sinuswellen unterschiedlicher Frequenzen
- Die Sinusfunktion ist die Grundfunktion für die Zerlegung
- Die breitet sich von $-\infty \ldots + \infty$ aus, dadurch nicht für eine örtliche Analyse geeignet.



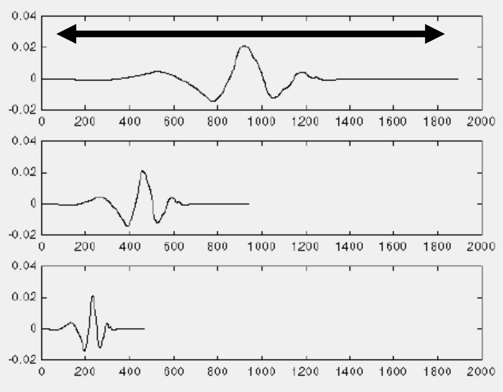
FFT vs. Wavelet 2/2

- Die Wavelet-Transformation verwendet andere Grundfunktionen: die Wavelet-Funktionen,
- Diese sind lokal im Zeitbereich definiert.
- Es gibt unterschiedliche Wavelet-Funktionen
- Die Zerlegung ist dann ähnlich zu der der FFT

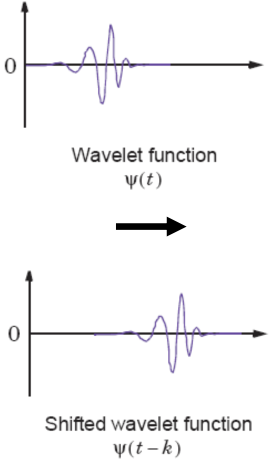


Wavelet-Funktionen

Skalierend

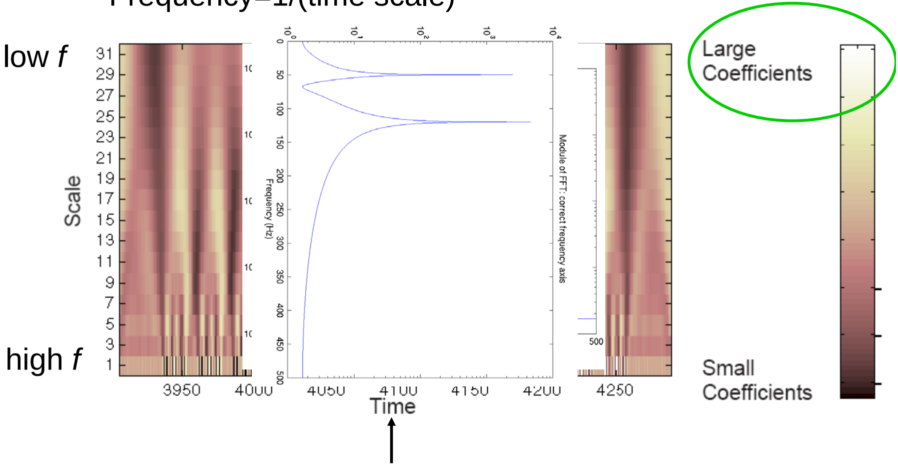


Verschiebend



Verstehen des Ergebnisses

Frequency=1/(time scale)



Time-information is not lost!

Verstehen des Ergebnisses