Finite Elemente Modellierung

- Modellerstellung
- Diskretisierung des Kontinuums
- Methode der Finite Elemente
- Anwendungsbeispiele der FEM
- Zugstab: Kraftmethode
- Zugstab: Energiemethode
- Zugstab: Ansatzfunktion

FEM

Wesentliche Schritte für eine Berechnung:

- Aufstellung eines hinreichend genauen Modells
- Mathematisch korrekte Bearbeitung des Modells
- Richtige Interpretation der Ergebnisse

Modellerstellung

1. Geometrie:

- Beschreibung des Raumes, in dem der physikalische Prozess abläuft
- Übernahme der Geometrie in das Berechnungsmodell, so dass alle wesentlichen Effekte, die von der Geometrie abhängen, berücksichtigbar sind
- Setzt Erfahrung voraus (zu grob, zu fein)

Modellerstellung

2. Werkstoffeigenschaften:

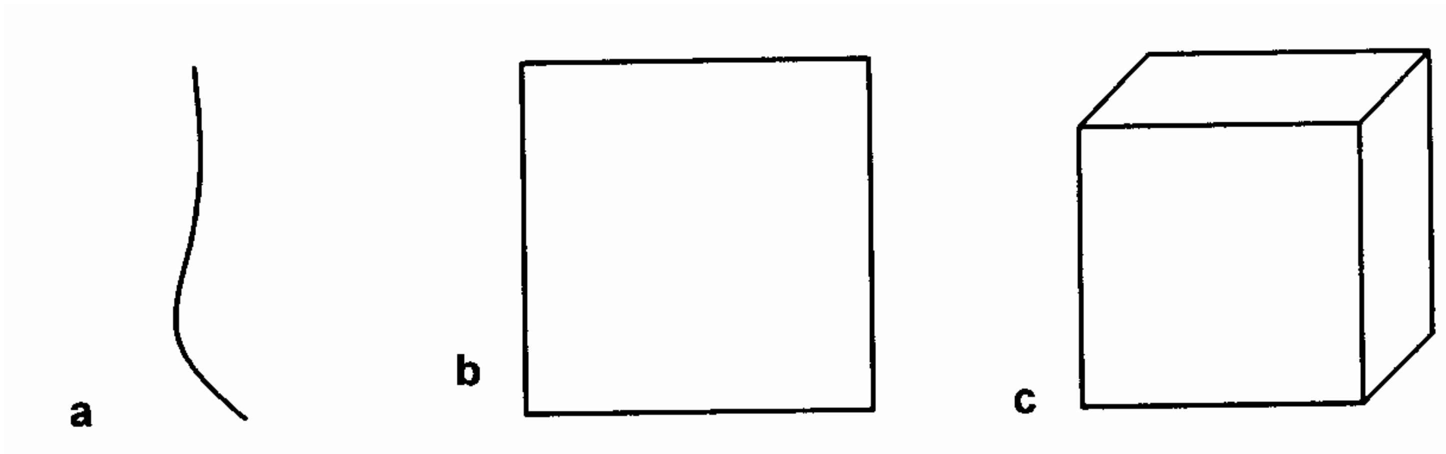
- Gesamtheit der Gesetze der Stoffe, aus denen sich die betrachtete Struktur zusammensetzt
- Oft stark vereinfachte Modelle der komplexen atomaren oder molekularen Vorgänge in den Stoffen

Modellerstellung

3. Randbedingungen:

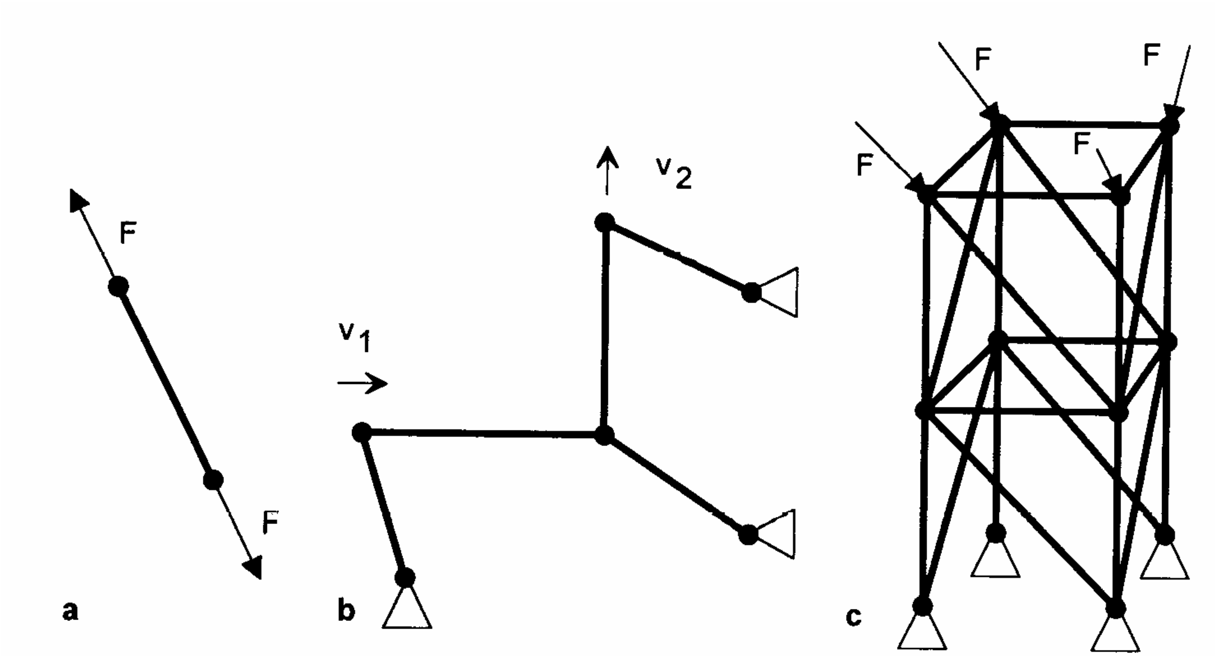
- Alle Einflüsse der Umgebung auf das zu berechnende Bauelement
- Wirkung meist auf die Oberfläche oder den Rand des zu untersuchenden Gebietes
- Zwei Arten von Randbedingungen: physikalische Grössen, Änderung dieser physikalischen Grössen

Diskretisierung



Beispiele von Kontinua: a) 1-D: Schnur, Faden
b) 2-D: Platte, c) 3-D: Würfel

Diskretisierung

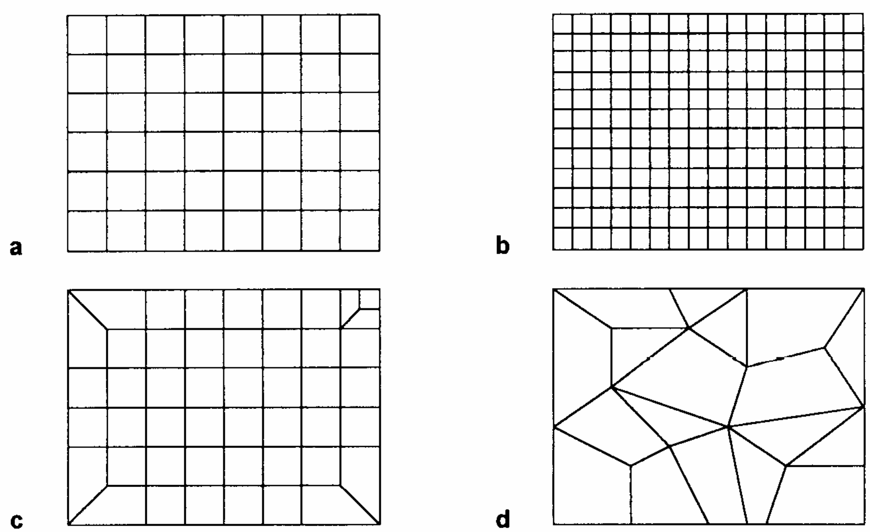


Beispiele diskreter Strukturen: a) 1-D: Zugstab unterLast, b) 2-D: ebenes Getriebe, c) 3-D: räumliches Fachwerk unter Last

Grundidee der FEM

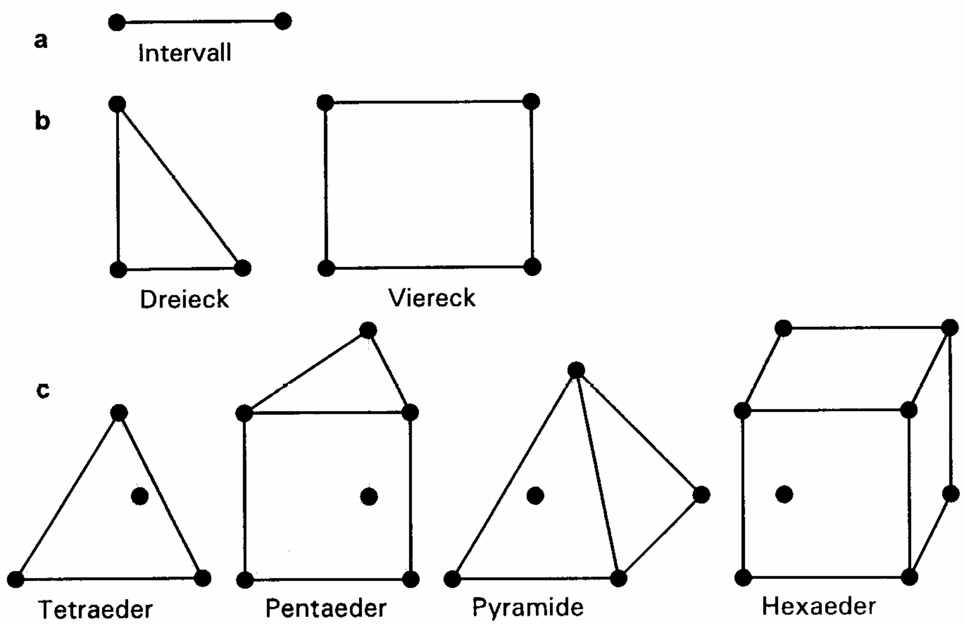
- Ein reales Bauteil wird aus einfachen Teilen (Elementen) zusammengesetzt, deren Verhalten bekannt ist. Dies bezeichnet man als Diskretisierung des Kontinuums.
- Das Verhalten des Bauteils unter Belastung ist die Summe des Verhaltens seiner Elemente

Diskretisierung des Kontinuums



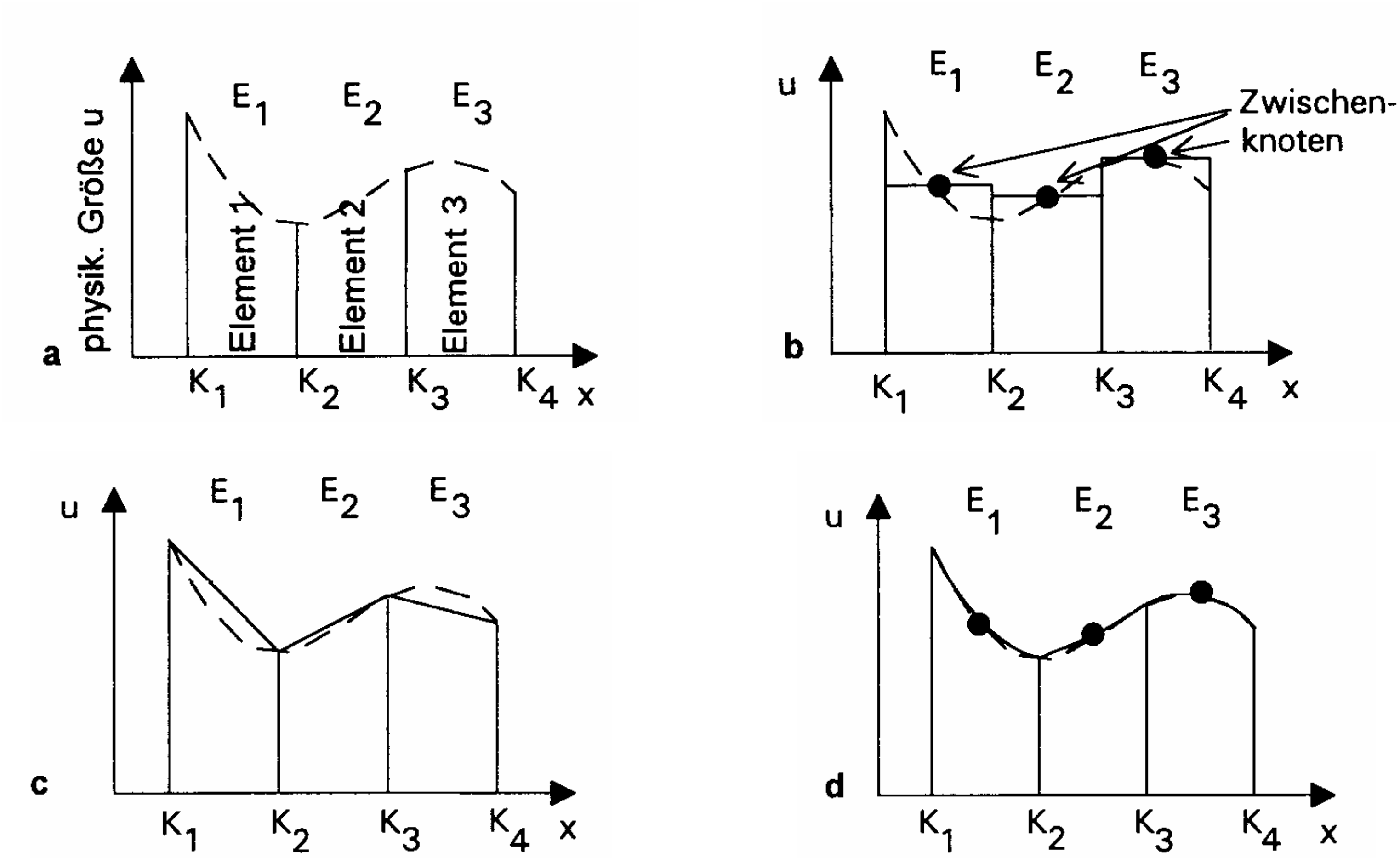
- Diskretisierung einer ebenen Platte: a) regelmässiges Netz 8x6, b) regelmässiges Netz 16x12, c) lokal modifiziertes Netz, 47 Viereckelemente, d) unregelmässiges Netz, 18 Drei- und Viereckelemente

Elementformen



- Elementformen kommerzieller Programmsysteme: a) 1-dimensional (Stab), b) 2-dimensional, c) 3-dimensional

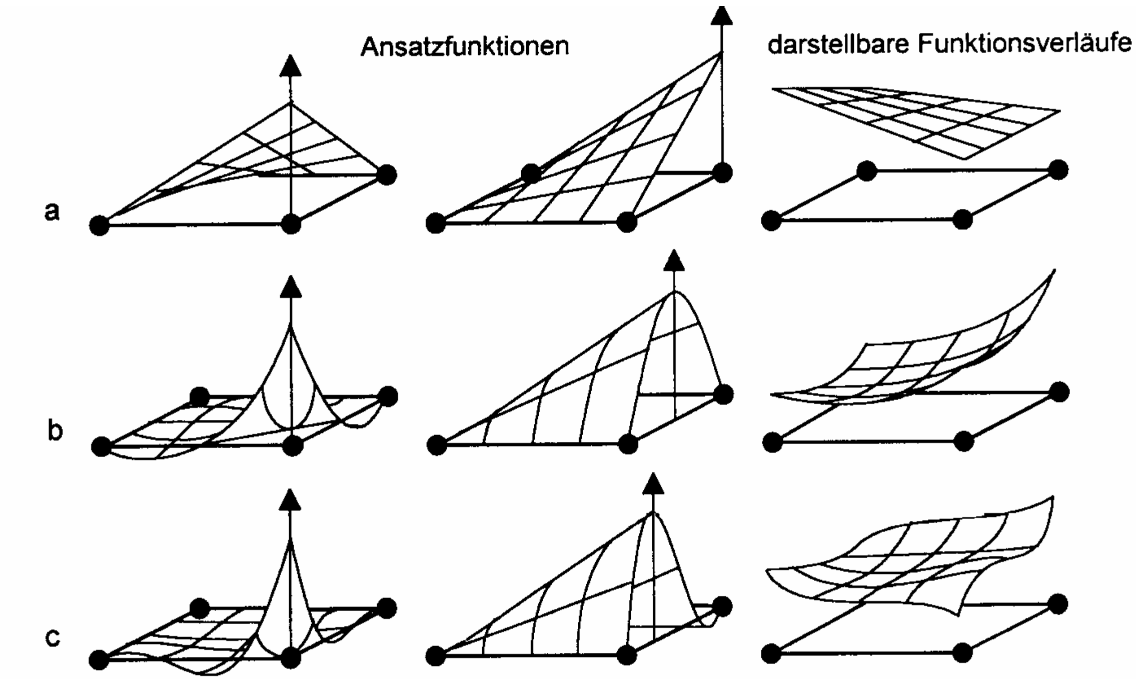
Ansatzfunktionen



Ansatzfunktionen

- Die Funktion ist auf dem ganzen Element definiert
- Jede Funktion ist einem Knoten des Elements zugeordnet
- An diesem Knoten habe die Funktion den Wert 1, an anderen Knoten verschwindet sie
- Die Summe der Näherungsfunktionen auf einem Element ist 1
- An gemeinsamen Flächen oder Kanten haben die Näherungsfunktionen der jeweiligen Knoten gemeinsame Werte

Ansatzfunktionen



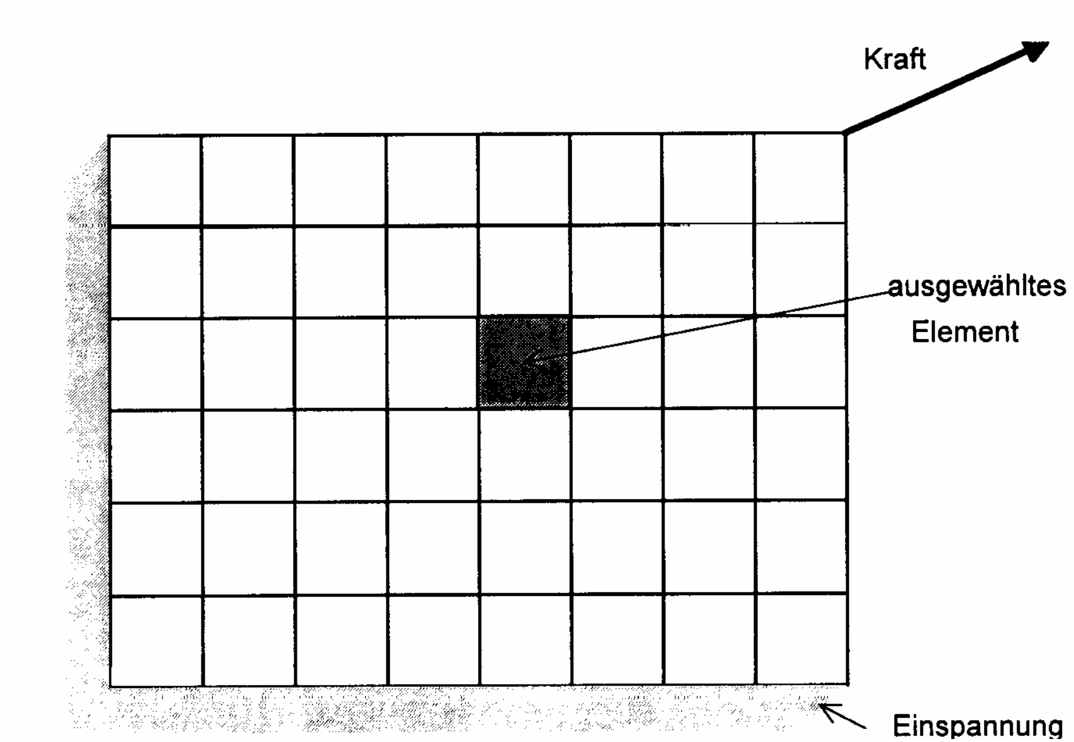
- 2-D Ansatzfunktionen und darstellbare Funktionsverläufe: a) linear, b) quadratisch, c) kubisch

FEM

Finites Element:

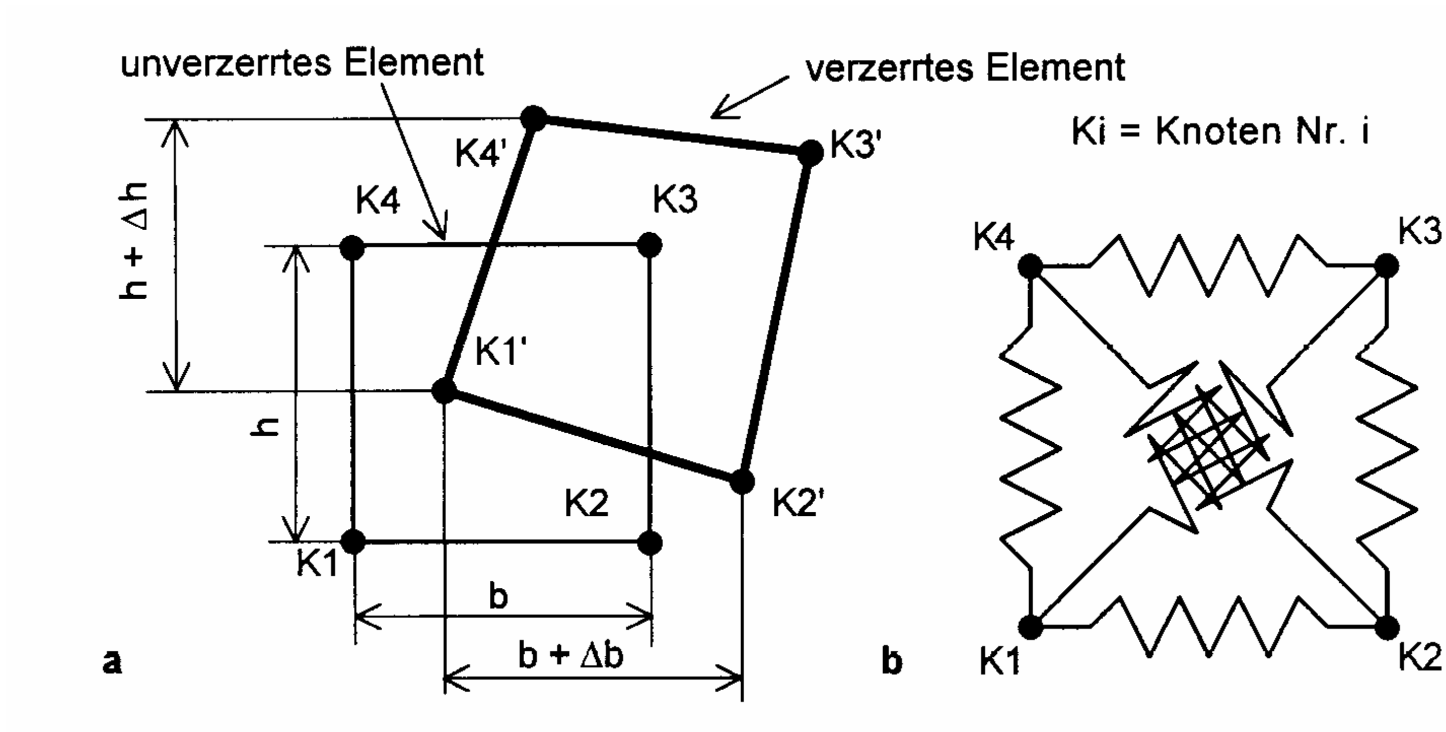
- Ein Finites Element ist ein durch endlich viele Knoten beschriebener Teilbereich des Kontinuums mit einer dazu passenden Ansatzfunktion

Methode der FE



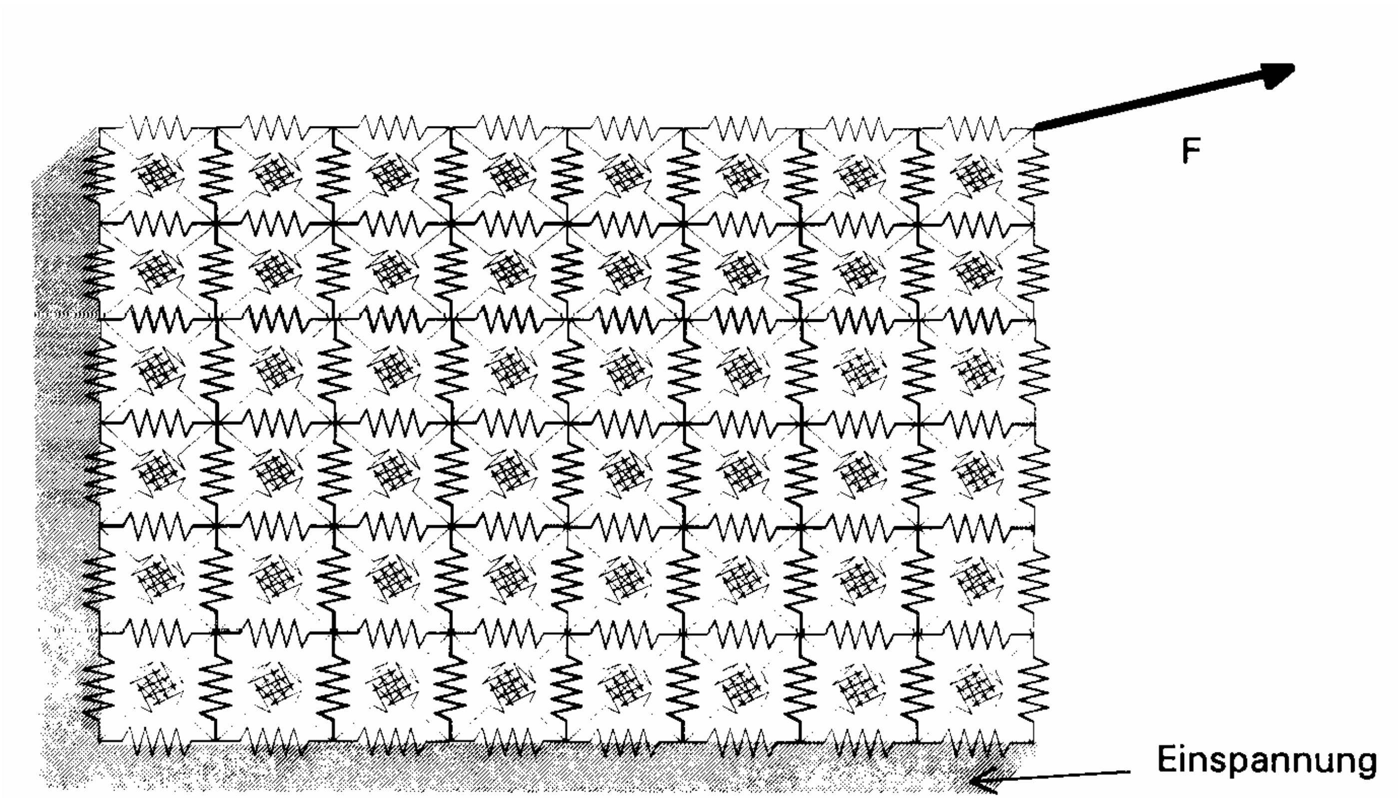
- Elementeinteilung einer Platte mit Einzellast und Einspannung

Methode der FE



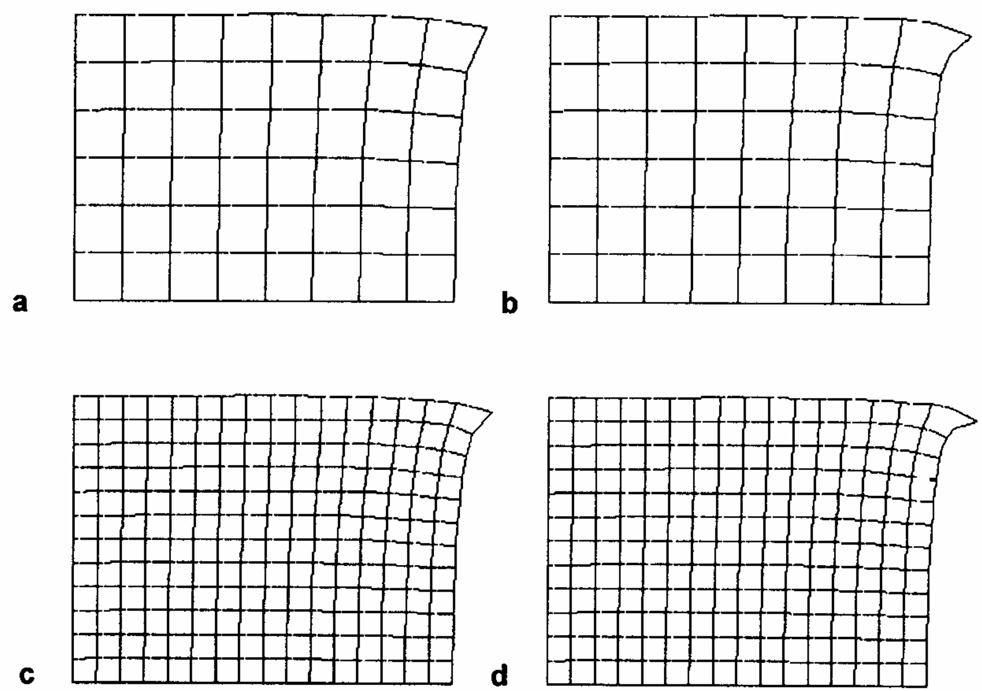
- Ersatzfedermodell: a) unverzerrtes und verzerrtes Modell, b) Ersatzfedern der Elementsteifigkeit

Methode der FE



- Zusammenbau der Gesamtsteifigkeit aus den Elementbeiträgen

Methode der FE



- Berechnete Verformungen der Platte a) 6x8 QUAD4-Elemente, b) 6x8 QUAD8-Elemente, c) 12x16 QUAD4-Elemente, d) 12x16 QUAD8-Elemente

Methode der FE

Modell	Element-Typ	Anzahl Knoten	Anzahl Elemente	Verschiebung Krafteinleitungs knoten	Rechenzeit
a	QUAD4	63	48	0,1420	0,51
b	QUAD8	173	48	0,1867	1,02
c	QUAD4	221	192	0,1749	1,45
d	QUAD8	633	192	0,2191	3,67

Anwendungsgebiete der FEM

- Statik und Dynamik:	elastische und elastoplastische Festigkeitsberechnung
	automatisierte Bauteilauslegung und -optimierung
	Bruchmechanik
	Eigenschwingverhalten
	Resonanzen, erzwungene Schwingungen
	dynamische Zeitverläufe
- Potentialprobleme:	stationäre und transiente Wärmeleitung
	wirbelfreie inkompressible Strömungen
	Galvanisieren
	elektrostatische (Coulomb-) Feldanalysen
- Elektrodynamik	elektromagnetische Verträglichkeit
	Schutzeinrichtungen
	Senderoptimierungen

Anwendungsgebiete der FEM

- Strömungsmechanik	Stationäre und transiente Fluidmechanik
	Kühleroptimierung
	Reduktion des Luftwiderstands
- Kontaktanalysen	Unfallsimulationen
	Umformvorgänge
- Biomechanik	Optimierung von Implantaten
	(z.B. künstliche Hüftgelenke)
	Auswertung von Tomographiedaten
	Schallwellenausbreitung im Gewebe bei
	Gewalteinwirkungen
- Werkstoffmechanik	Schadens- und Versagensmodelle
	Simulation von Füge- und Umwandlungsvorgängen

Zugstab: Kraftmethode

Elementare Gleichungen:

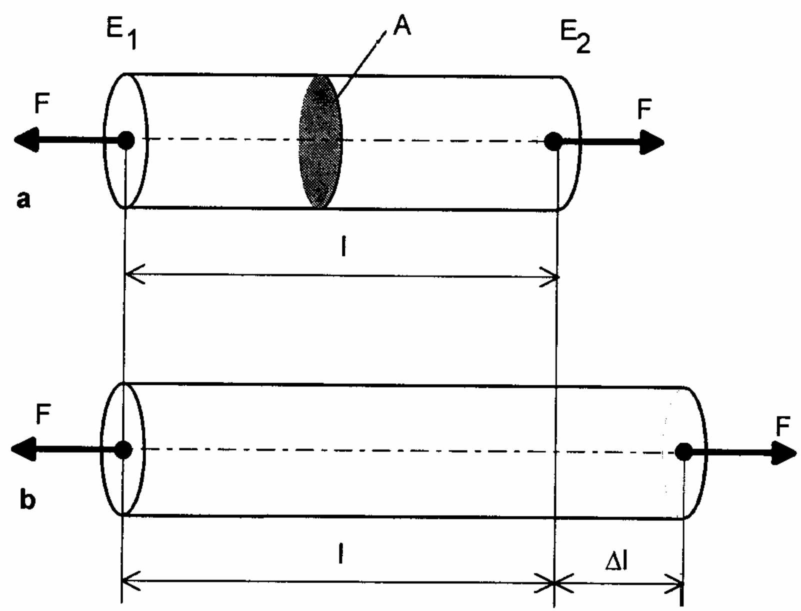
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

σ	die Spannung,
ε	die Dehnung,
Δl	die Verlängerung,
l	die Länge,
F	die Kraft,
A	die Querschnittsfläche und
E	den Elastizitätsmodul

Zugstab: Kraftmethode



- Verlängerung eines Stabes unter Last a) Ausgangslänge, b) Verlängerungerung durch Kraft F: es gilt

$$\frac{F}{A} = \sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

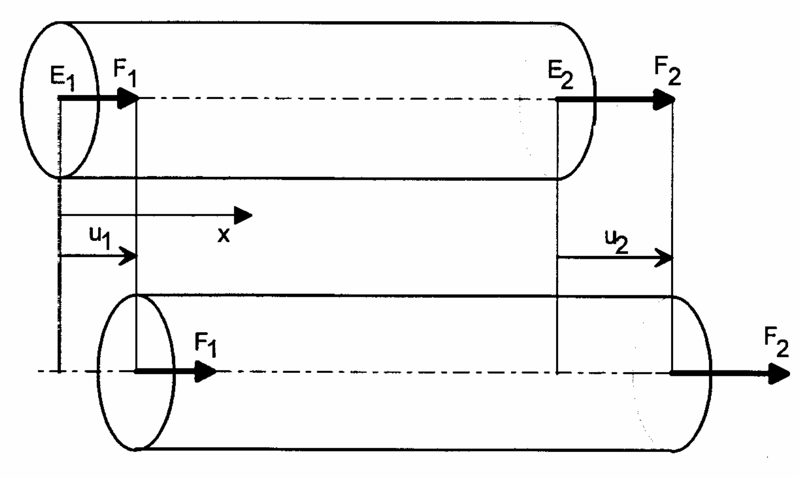
Zugstab: Kraftmethode

Definition der Steifigkeit:

- Steifigkeit k ist der Quotient aus Kraft F und Verlängerung Δl

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$$

Zugstab: Kraftmethode



- An den Enden E_1, E_2 wirken die Kräfte F_1, F_2 in x-Richtung
- Es stellen sich die Verschiebungen u_1 und u_2 ein

Zugstab: Kraftmethode

Gedankenexperiment:

- E_1 wird festgehalten (u_1=0), Verschiebung bei E_2 sei u_2
- sei K_{iJ} = (Kraft F_i auf Stabende i) / (Verschiebung u_J des Endes E_J) so ergibt sich:

$$k_{2,2} = \frac{F_2}{u_2} = \frac{EA}{l} = k$$

Zugstab: Kraftmethode

- Um das Ende E_2 um u_2 zu verschieben (E_1 fest), ist die Kraft F_2 erforderlich:

$$F_2 = k\,u_2 = \frac{EA}{l}\,u_2$$

- Bei dieser Verschiebung tritt am Ende E1 eine Lager-, Einspann- oder Reaktionskraft auf:

$$F_1 = -k\,u_2 = -\frac{EA}{l}\,u_2$$

Zugstab: Kraftmethode

- Somit wird $$k_{1,2} = \frac{F_1}{u_2} = -\frac{EA}{l} = -k$$

- Entsprechend gilt bei der Verschiebung u_1 am Ende E_1 bei $u_2=0$:

$$k_{1,1} = \frac{F_1}{u_1} = \frac{EA}{l} = k$$

$$k_{2,1} = \frac{F_2}{u_1} = -\frac{EA}{l} = -k$$

Zugstab: Kraftmethode

Allgemeiner Fall:

- Verschiebungen u_1 und u_2 an den Enden
- Die Kräfte berechnen sich aus den Steifigkeiten:

$$F_1 = k_{1,1}\,u_1 + k_{1,2}\,u_2 = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2)$$

$$F_2 = k_{2,1}\,u_1 + k_{2,2}\,u_2 = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) = -F_1$$

Zugstab:Kraftmethode

$$\mathbf{F}_{elem} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,1}, & k_{1,2} \\ k_{2,1}, & k_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{elem}\, \mathbf{u}_{elem}$$

- Für die beiden Gleichungen wählt man eine Matrixdarstellung; $\mathbf{F}_{\mathbf{elem}}$ ist der Element – Kraftvektor mit den Komponenten F_1 und F_2, $\mathbf{u}_{\mathbf{elem}}$ ist der Element-Verschiebungsvektor mit den Komponenten u_1 und u_2

Zugstab:Kraftmethode

$$\mathbf{K}_{elem} = \begin{pmatrix} k_{1,1}, & k_{1,2} \\ k_{2,1}, & k_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k, & -k \\ -k, & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$$

- Diese Matrix heißt Elementsteifigkeitsmatrix des 1-dimensionalen, 2-knotigen Zugstabes (1-D ROD2-Element). Die meisten Elementmatrizen sind symmetrisch.
- Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{K}_{\mathbf{elem}}\, \mathbf{u}_{\mathbf{elem}} = \mathbf{F}_{\mathbf{elem}}$ ist nur lösbar, wenn der Stab mindestens an einem Ende gelagert wird (sonst Det $\mathbf{K}_{\mathbf{elem}} = 0$).

Zugstab: Energiemethode

- Bestimmung der Steifigkeit mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes
- Erhaltung der gespeicherten elastischen Dehnungsenergie des Zugstabes
- Die an den Enden wirkenden Kräfte leisten die äußere Arbeit:

$$W_{ex} = \frac{1}{2}(F_1 u_1 + F_2 u_2)$$

Zugstab:Energiemethode

- Elastische Energiedichte:

$$\frac{dW_{el}}{dVol} = \frac{1}{2}\varepsilon\,\sigma = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$$

- Gespeicherte elastische Energie:

$$W_{el} = \frac{1}{2}\sigma\,\varepsilon\,A\,l = \frac{1}{2}E\,\varepsilon^2\,Vol$$

Zugstab: Energiemethode

Mit der Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(u_2 - u_1)}{l}$

Ergibt sich: $W_{el} = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(u_2 - u_1)^2$

Matrixschreibweise:

$$W_{el} = \frac{1}{2}(u_1, u_2)\frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_{elem}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{elem}\mathbf{u}_{elem}$$

Daraus kann die Steifigkeitsmatrix berechnet werden.

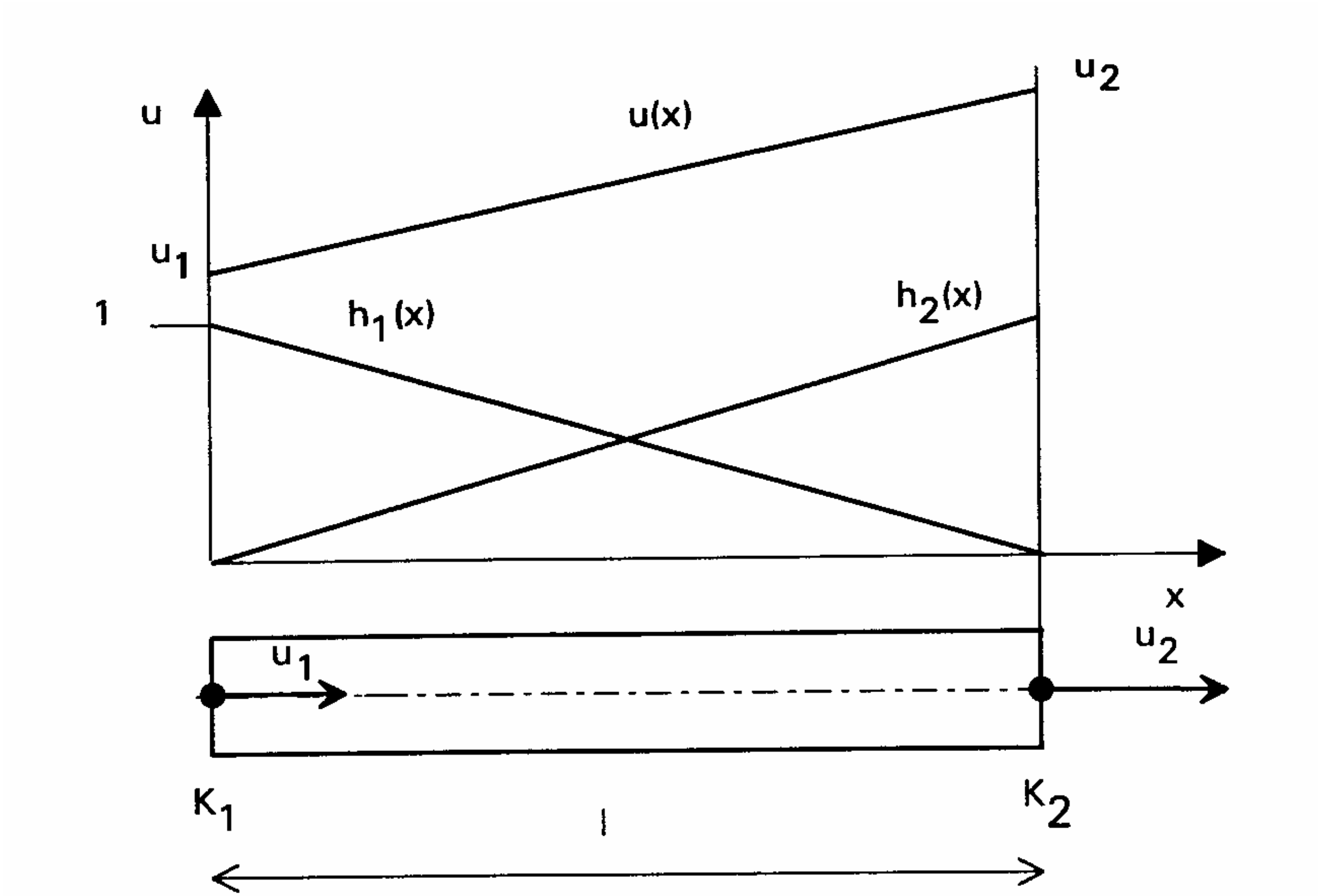
Zugstab: Ansatzfunktion

- Die Verschiebung u(x) längs des Zugstabes wird linear interpoliert aus den Verschiebungen der beiden Enden E_1 und E_2

$$u(x) = u_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_2\frac{x}{l}$$

- Die Enden werden als Knoten bezeichnet (K_1, K_2)

Zugstab: Ansatzfunktion



Zugstab: Ansatzfunktion

- Ansatzfunktionen $h_1(x)= (1-x/l)$, $h_2= x/l$
- Somit ist $u(x) = u_1\, h_1(x) + u_2\, h_2(x)$
- Matrixform:

$$u(x) \;=\; (h_1(x),\; h_1(x)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}\, \mathbf{u}_{elem}$$

- Interpolationsmatrix H :

$$\mathbf{H} = (h_1(x), h_2(x)) = (1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l})$$

Zugstab: Ansatzfunktion

- Dehnung als Ableitung der Verschiebung:

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_1 h_1(x) + u_2 h_1(x)\right)$$

$$\varepsilon(x) = u_1 h_1'(x) + u_2 h_2'(x)$$

- Matrixschreibweise:

$$\varepsilon(x) = \left(h_1'(x),\ h_2'(x)\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\ \mathbf{u}_{elem}$$

- **B** heißt Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix

Zugstab: Ansatzfunktion

- Elastische Energiedichte in Matrixform:

$$\frac{\mathrm{d}W_{el}}{\mathrm{d}Vol} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} E \ (\mathbf{B}\mathbf{u}_{elem})^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{u}_{elem})$$

$$= \frac{1}{2} E \ \mathbf{u}_{elem}^{\mathrm{T}} \ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \ \mathbf{B} \ \mathbf{u}_{elem}$$

$$= \frac{1}{2} E \, (u_1, u_2) \begin{pmatrix} h_1'(x) \\ h_2'(x) \end{pmatrix} (h_1'(x), h_2'(x)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} E \, (u_1, u_2) \begin{pmatrix} h_1'^2(x), & h_1'(x)\, h_2'(x) \\ h_1'(x)\, h_2'(x), & h_2'^2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{l^2} (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Zugstab: Ansatzfunktion

- Diese Beziehung stellt die Dichte der inneren elastischen Energie als Funktion der Verschiebung des den Stab definierenden Knotens dar. Dazu wurde das folgende Matrizenprodukt benötigt:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} h_1'(x) \\ h_2'(x) \end{pmatrix} (h_1'(x), h_2'(x)) = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{l} (-1, 1)$$

$$= \frac{1}{l^2} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$$

Zugstab: Ansatzfunktion

- Elastische Gesamtenergie erhält man durch Integration über das Volumen;
- Im vorliegenden Fall (elastischer Zugstab mit konstanter Spannung und Dehnung entspricht die Integration über das Volumen der Multiplikation mit dem Volumen

Zugstab: Ansatzfunktion

$$W_{el} = \int_{Vol} \frac{1}{2} E\, \varepsilon^2 \mathrm{d}Vol = \int_{Vol} \frac{1}{2} E\, \mathbf{u}_{elem}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}_{elem} \mathrm{d}Vol$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{l^2} (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} Al$$

$$= \frac{1}{2} (u_1, u_2) \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{elem}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{K}_{elem}\, \mathbf{u}_{elem}$$

Daraus ergibt sich die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\mathrm{elem}}$