2.4c ALLGEMEINE PROBLEME DER MECHANIK

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 401–T 403 Akademie Verlag

BERTRAM, A.; OLSCHEWSKI, J.

Zur Formulierung anisotroper linearer anelastischer Stoffgleichungen mit Hilfe einer Projektionsmethode

MSC (1980): 73B05

Im Rahmen der linearen anisotropen Elastizitätstheorie benutzt man Eigenraumprojektionen zur Darstellung von Materialtensoren. Ein ähnliches Vorgehen ist auch bei anelastischen Materialien vorteilhaft, wie es am Beispiel der linearen Viskoelastizität gezeigt wird. Es gelingt damit, die tensorwertigen Differentialgleichungssysteme in orthogonalen Unterräumen zu formulieren und die Rechenregeln wie die für skalarwertige Ausdrücke zu vereinfachen. Die Methode ist immer dann anwendbar, wenn die Materialtetraden koaxial sind. Für einige wichtige Kristallklassen ist dies gesichert. Für andere bildet diese Annahme ein Analogon zur „Bequemlichkeitshypothese" in der Dynamik gedämpfter Strukturen.

1. Problemstellung

Bei der Formulierung von anelastischen Stoffgesetzen ist es vorteilhaft und verbreitet, von rheologischen Modellen auszugehen. Im Rahmen der linearen Viskoelastizität, in dem wir die Projektionstechnik demonstrieren wollen, bestehen solche Modelle aus linearen Federn und Dämpfern, die durch die elementaren Gesetze

$$\sigma^J = C^J \varepsilon^J \quad \text{bzw.} \quad \sigma^J = D^J \dot{\varepsilon}^J \tag{1, 2}$$

beschrieben werden (J: Elementindex). Mittels geometrischer und dynamischer Verträglichkeitsbedingungen kann man eine Differentialgleichung vom (r, q)-Typ

$$R_r \sigma^{(r)} + R_{r-1} \sigma^{(r-1)} + \ldots + R_1 \dot{\sigma} + R_0 \sigma = Q_q \varepsilon^{(q)} + \ldots + Q_0 \varepsilon \tag{3}$$

erhalten, die nur noch die Struktur-Spannung $\sigma(t)$ und -Dehnung $\varepsilon(t)$ und deren Zeitableitungen enthält. Für numerische Integrationen wird man zweckmäßigerweise (3) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln. Alle diese Operationen sind im eindimensionalen Falle an skalarwertigen Gleichungen vorzunehmen und problemlos möglich. Im folgenden soll gezeigt werden, wie auch im Dreidimensionalen beim Vorliegen von Anisotropien ein Kalkül entwickelt werden kann, der entsprechende Operationen in Tensorräumen mit derselben Einfachheit ermöglicht. Dazu wird ein Vorgehen verallgemeinert, daß aus der linearen anisotropen Elastizitätstheorie bekannt ist und im folgenden kurz dargestellt werden soll (s. [1], [2], [3], [4]).

2. Spektraldarstellung von Materialtensoren vierter Stufe

Das allgemeine linearelastische Gesetz als Zusammenhang zwischen einem (symmetrischen) Spannungs- und Deformationstensor wird durch eine Materialtetrade $\mathbb{C}$ vermittelt gemäß

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[\mathbf{E}] \quad \text{oder kartesisch} \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}\,, \tag{4}$$

wobei man üblicherweise folgende Symmetrien unterstellt:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}\,. \tag{5}$$

Grundsätzlich kann $\mathbb{C}$ wegen (5) in eine Spektraldarstellung gemäß ($\circ$ Tensorprodukt)

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathbf{E}_i \circ \mathbf{E}_i \tag{6}$$

gebracht werden, wobei die $\mathbf{E}_i$ symmetrische normierte Eigentensoren 2. Stufe und λ_i die zugehörigen reellen Eigenwerte von $\mathbb{C}$ sind, die das Eigenwertproblem

$$\mathbb{C}[\mathbf{E}_i] = \lambda_i \mathbf{E}_i \tag{7}$$

lösen. Aus Dimensionsgründen sind maximal 6 verschiedene Eigenwerte möglich. Enthält die Symmetrieklasse mehr als 6 unabhängige Materialparameter, so dienen diese dazu, die Eigenrichtungen $\mathbf{E}_i$ zu determinieren. Hierzu sind im triklinen Extremfall genau 15 Konstanten nötig. Man definiert nun die folgenden n Projektoren (Tensoren 4. Stufe)

$$\mathbb{P}_i = \sum \mathbf{E}_j \circ \mathbf{E}_j\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{8}$$

wobei die Summe über alle Eigentensoren mit gleichem Eigenwert genommen wird. Aufgrund der Orthogonalität der Eigenräume gilt dann

$$\mathbb{P}_i[\mathbf{E}_i] = \mathbf{E}_i \quad \text{für alle} \quad i\,, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}_i[\mathbf{E}_j] = \mathbf{O} \quad \text{für alle} \quad i \neq j\,. \tag{10}$$

Die Projektoren erfüllen folgende Regeln:

$$\mathbb{P}_i\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_i \qquad \text{(idempotent)}\,, \tag{11}$$

$$\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j = \mathbb{O} \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \text{(biorthogonal)}\,. \tag{12}$$

Der Identitätstensor vierter Stufe ist darstellbar als

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i\,. \tag{13}$$

Betrachten wir nun zwei Linearkombinationen wie (6)

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbb{P}_i\,, \qquad \mathbb{D} = \sum_{i=1}^{n} d_i\mathbb{P}_i\,, \tag{14}$$

dann können wir mit den folgenden Regeln die tensoriellen Verknüpfungen auf skalare zurückführen:

$$\mathbb{C} + \mathbb{D} = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i)\,\mathbb{P}_i \quad \text{Summe}\,, \tag{15}$$

$$\mathbb{C}\mathbb{D} = \sum_{i=1}^{n} (c_i d_i)\,\mathbb{P}_i \quad \text{Komposition} \tag{16}$$

und deshalb

$$\mathbb{C}\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{C} \quad \text{Kommutativität}\,. \tag{17}$$

Ein solches $\mathbf{C}$ ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte $c_i \neq 0$. In diesem Fall ist die Inverse gegeben durch

$$\mathbb{C}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} 1/c_i\mathbb{P}_i\,. \tag{18}$$

$\mathbb{C}$ ist darüber hinaus positiv definit, falls alle $c_i > 0$.

3. Anwendungen auf viskoelastische Systeme

Mit den obigen Konzepten und Regeln sind wir nun in der Lage, die eindimensionalen rheologischen Systeme anisotrop auf drei Dimensionen zu verallgemeinern. Dazu werden wir versuchen, alle Elementargesetze wie in (1) und (2) in die Form (4) zu bringen. Wir betrachten dazu ein beliebiges rheologisches Modell mit Federn und Dämpfern, deren Stoffgesetz

$$\mathbf{T}^J = \mathbb{C}^J[\mathbf{E}^J] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^J = \mathbb{D}^J[\dot{\mathbf{E}}^J] \tag{19, 20}$$

seien. Hierbei ist $\mathbb{C}^J$ eine Steifigkeitstetrade und $\mathbb{D}^J$ eine Viskositätstetrade. Wir wollen im weiteren davon ausgehen, daß beide grundsätzlich symmetrisch und positiv definit sind. Um unsere Projektionsmethode anwenden zu können, muß für das Modell folgendes gelten:

Koaxialitäts-Eigenschaft: Alle Materialtensoren des Materials haben dieselben Eigenräume.

Die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen des Modells werden aus Summen von elementaren Dehnungstensoren bestehen, während die dynamischen die Gleichheit von Spannungssummen festlegen. Wendet man auf diese Gleichungen sowie auf (19) und (20) einen Projektor $\mathbb{P}_i$ an, so kann man gemäß den Regeln (8) bis (18) in den Eigenräumen alle Rechnungen auf skalare zurückführen.

4. Der Geltungsbereich der Koaxialitätseigenschaft

Wesentliche Annahme, die unserer Methode zugrundeliegt, ist die Koaxialität der Materialtetraden. Es bleibt zu untersuchen, in welchen Fällen sie erfüllt ist, und wie man sonst vorgehen kann. Für mindestens zwei Symmetrieklassen kann gezeigt werden, daß sie grundsätzlich erfüllt ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Eigenrichtungen und damit die Projektoren unabhängig von der Wahl der Materialkonstanten sind.

a) Isotropie

Es ist bekannt, daß für isotrope Materialien die sphärischen und die deviatorisch-symmetrischen Tensorrichtungen grundsätzlich Eigenrichtungen sind. Wir können deshalb mit

$$\mathbb{P}_1 := 1/3\,\mathbf{I} \circ \mathbf{I} \tag{21}$$

und

$$\mathbb{P}_2 := \mathbb{I} - \mathbb{P}_1 \tag{22}$$

jeden isotropen Tensor darstellen als

$$\mathbb{C} = c_1 \mathbb{P}_1 + c_2 \mathbb{P}_2 \tag{23}$$

mit den beiden (Laméschen) Konstanten c_1 und c_2.

b) Kubische Anisotropie

Für diese Symmetrie-Klasse gibt es maximal drei verschiedene Eigenwerte. Die Projektoren sind: $\mathbb{P}_1$ wie (21),

$$\mathbb{P}_2 := \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i) - \mathbb{P}_1\,, \tag{24}$$

$$\mathbb{P}_3 := \mathbb{I} - \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2\,, \tag{25}$$

wobei $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ die Kristallachsenbasis bilden. Jeder kubisch-anisotrope Materialtensor läßt sich dann als Linearkombination der drei $\mathbb{P}_i$ mit drei Konstanten darstellen. Ein ausführliches Beispiel für die Anwendung unserer Methode für diese Symmetrieklasse auf ein 4-parametriges Modell findet man in [5], seine Anwendung auf FEM-Rechnungen für gekerbte Kriechproben in [6].

Bei transversalen, orthotropen und schwächer-symmetrischen Kristallklassen bis hin zu triklinen Stoffen ist es möglich, daß die Eigenrichtungen von den Materialkonstanten abhängen. In diesen Fällen ist also die Koaxialitäts-Eigenschaft nicht automatisch erfüllt und muß im Einzelfall verifiziert werden. Ist sie nicht exakt erfüllt, so bleibt zu erwägen, ob die Abweichung der Eigenrichtungen nicht vernachlässigbar ist. Dieses Vorgehen wäre analog zur „Bequemlichkeitshypothese" der dynamischen Theorie linearer gedämpfter Strukturen, die für die meisten realen Strukturen auch nur eine Näherung darstellt.

Literatur

1 Rychlewski, J.: On Hooke's law. Prikl. Mat. Mech. U.S.S.R. **48** (1984) 3, 303–314.
2 Walpole, L. J.: Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes: Multiplication tables. Proc. of the Royal Society London **A 391** (1984), 149–179.
3 Trostel, R.: Mechanik VII, 1. Materialgleichungen spezieller Medien. In: Schriftenreihe Physikalische Ingenieurwissenschaften, Vol. 13, TU Berlin 1990.
4 Theocaris, P. S.; Philippidis, T. P.: Spectral decomposition of compliance and stiffness fourth-rank tensors suitable for orthotropic materials. ZAMM **71** (1991) 3, 161–171.
5 Bertram, A.; Olschewski, J.: Formulation of anisotropic linear viscoelastic constitutive laws by a projection method. In: Freed, A.; Walker, K. P. (eds.): High temperature constitutive modeling: Theory and application ASME, MD-Vol. **26**, AMD-Vol. **121** (1991), 129–137.
6 Bertram, A., Olschewski, J.; Sievert, R.; Zelewski, M.: Constitutive modeling of the creep behaviour of single crystals with applications to notched specimens. In: Desai, C. S. et al. (eds.): Constitutive laws for engineering materials. ASME Press, New York 1991, pp. 237–240.

Anschrift: Dr.-Ing. A. Bertram; J. Olschewski, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Unter den Eichen 87, W-1000 Berlin 45, Deutschland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 73 (1993) 4–5, T 404–T 407 Akademie Verlag

KOŃCZAK, Z.

Reflection and Refraction of Plane Waves at the Interface between Elastic Solid and Porous Medium Filled with Fluid

MSC (1980): 73D15

Introduction

Problems involving waves phenomena in geological formation, due to its appearance in geophysics, seismology and earthquake engineering, are of considerable practical interest, and therefore they have been the subject of several investigations. Most of the work has been concerned with waves propagation in media composed of non porous deformable materials filled with fluid.

In this paper we shall focus our attention on the reflection and refraction of a plane longitudinal harmonic wave obliquely incident on the interface seperating two perfectly bounded media possessing different mechanical and physical properties as well. Namely, one of the medium in which the wave is incident is assumed to be an impervious, elastic, isotropic solid, but the other one in which the wave is transmitted is assumed to be a deformable porous medium filled with fluid.

Basic equations and their solutions

As our point of departure we take the basic equations describing the behaviour of the media under consideration.
(i) For the elastic solid, $x_2 \leqq 0$:

In the absence of body forces the equations of motion may be written as

$$\mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu)\, v_{k,ki} = \varrho \ddot{v}_i \tag{1}$$

and the stresses in the solid are given by

$$t_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} \tag{2}$$

where $\boldsymbol{v}$ is the displacement vector, λ and μ are the Lamé constants and ϱ is the density.

Applying, as usual, a decomposition of the displacement vector of the form $v_i = p_{,i} + e_{ijk} q_{k,j}$, where e_{ijk} is the permutation symbol and p, $\boldsymbol{q}$ are scalar and vector potentials, we are able to express the displacements and stresses in the following form

$$v_1 = ik\{A_0\, e^{ik\varphi_1^+} + A_1\, e^{ik\varphi_1^-} + \varkappa_2(B_1\, e^{ik\varphi_2^+} - B_2\, e^{ik\varphi_2^-})\} \tag{3}$$

$$v_2 = ik\{\varkappa_1(A_0\, e^{ik\varphi_1^+} - A_1\, e^{ik\varphi_1^-}) - (B_1\, e^{ik\varphi_2^+} + B_2\, e^{ik\varphi_2^-})\} \tag{4}$$

$$t_{12} = -\mu k^2\{2\varkappa_1(A_0\, e^{ik\varphi_1^+} - A_1\, e^{ik\varphi_1^-}) + (\varkappa_2^2 - 1)(B_1\, e^{ik\varphi_2^+} + B_2\, e^{ik\varphi_2^-})\} \tag{5}$$

$$t_{22} = -\mu k^2\{(\varkappa_1^2 - 1)(A_0\, e^{ik\varphi_1^+} + A_1\, e^{ik\varphi_1^-}) - 2\varkappa_2(B_1\, e^{ik\varphi_2^+} - B_2\, e^{ik\varphi_2^-})\} \tag{6}$$

where

$$\varphi_j^{\pm} = x_1 \pm \varkappa_j x_2 - ct\,, \qquad \varkappa_j^2 = \left(\frac{c}{c_j}\right)^2 - 1\,, \qquad c = \frac{\omega}{k}\,, \qquad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}\,, \qquad c_2 = \frac{\mu}{\varrho} \qquad (j = 1, 2)\,.$$

Here c is the phase velocity, ω is the radian frequency, k is the wave number and t is the time.
(ii) For the fluid-saturated porous medium, $x \geqq 0$:

In order to describe the behaviour of a porous medium filled with fluid we apply the equations formulated by BIOT [1]. Although other theories have been recently developed by several investigators, the Biot's theory remains videly accepted for the study of wave motion in mentioned media. Then, following Biot equations of motion in the absence of body forces, and the terms which account for the dissipation due to the flow of fluid relative to the porous skeleton, can be written as follows

$$\begin{aligned} &N\nabla^2 u_i + (A + N)\, u_{k,ki} + QU_{k,ki} = \varrho_{11}\ddot{u}_i + \varrho_{12}\ddot{U}_i\,, \\ &Qu_{k,ki} + RU_{k,ki} = \varrho_{12}\ddot{u}_i + \varrho_{22}\ddot{U}_i \end{aligned} \tag{7}$$