

Reduktion elastischer Strukturen für MKS Anwendungen

Elmar Woschke, Christian Daniel, Jens Strackeljan

Otto-von Guericke-Universität , Institut für Mechanik

<mailto:{elmar.woschke}{christian.daniel}{jens.strackeljan}@ovgu.de>

Abstract

By reason of increasing complexity and the demand of optimised structures, not all components of a mechanical model can be treated as ideal rigid, which leads to the necessity of implementing elastic bodies in Multi-Body-Systems (MBS). Due to the limited processable degrees of freedom in MBS, substructuring is essential and can be reached in different ways. There are differences both in accomplishment and resulting characteristics between the usual reduction schemes, the static condensation (GUYAN-Reduction) and the mixed static-modal reduction (CRAIG-BAMPTON-Reduction). Alternatively a reduction of degrees of freedom can be achieved by use of dynamical compliance matrices. These three methods are introduced in the present paper comparing there advantages and disadvantages.

1. Implementierung elastischer Strukturen in MKS¹-Systeme

Bei der Simulation komplexer dynamisch belasteter Strukturen finden für industrielle und forschungsnahe Anwendungen eine Vielzahl an Mehrkörperprogrammen Verwendung. Die Forderung nach steigender Komplexität und optimierten Bauteilen führt zu der Notwendigkeit der Berücksichtigung elastischer Komponenten in MKS-Programmen, wobei die Aufgabenstellung der Implementierung dieser Strukturen auf verschiedenen Wegen erreicht werden kann.

1.1 Reduktionsverfahren

Ein Standardverfahren zur Berechnung elastischer Strukturen stellt die Finite-Element-Methode dar, wobei abhängig vom Detaillierungsgrad und dem konkreten Bauteil bei der Modellierung in der Regel mehrere tausend Freiheitsgrade entstehen. Im Gegensatz dazu finden bei der Berechnung mit MKS-Programmen je nach Modellgröße häufig nicht mehr als 100 Freiheitsgrade Anwendung. Die Konsequenz aus diesen Unterschieden in den Beschreibungsformen und der Unmöglichkeit der Berücksichtigung mehrerer tausend Freiheitsgrade in einem MKS-Programm ist die Notwendigkeit der Reduktion der Freiheitsgradanzahl. Der einfachste Ansatz ist dabei die statische Kondensation (GUYAN-Reduktion) /1/. Für die Reduktion werden die Freiheitsgrade in *Master*- und *Slave*-Freiheitsgrade unterschieden (vgl. (1)). Durch die Trennung sowohl bei den Verschiebungsvektoren in diejenigen Anteile, die sich auf *Master*-Freiheitsgrade \mathbf{u}_m und *Slave*-Freiheitsgrade \mathbf{u}_s beziehen, als auch bei den wirkenden Kräften \mathbf{F}_m und \mathbf{F}_s ergibt sich für die Gesamtsteifigkeitsmatrix ein Aufteilung in vier Teilmatrizen. Per Definition stehen nach der Reduktion noch die *Master*-Freiheitsgrade zur Verfügung und müssen dementsprechend ausgewählt werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

¹ Mehrkörpersimulation

Die Verschiebungen der *Slave*-Freiheitsgrade werden nach (2) berechnet.

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{K}_{ss}^{-1}(\mathbf{F}_s - \mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m) \quad (2)$$

Diese Reduktion ist für statische Untersuchungen exakt, bildet allerdings das dynamische Verhalten der Struktur, besonders im hochfrequenten Bereich nur unvollständig ab. Die Eignung für den Einsatz im Bereich der Motorsimulation mit einem weiten Frequenzanregungsspektrum muss aus diesem Grund untersucht werden.

Ein deutlich komplexerer Ansatz ist von CRAIG-BAMPTON beschrieben worden und wird als gemischt statisch-modale Reduktion bezeichnet. Dabei werden neben den physikalischen Koordinaten auch modale Freiheitsgrade verwendet, welche es erlauben, das dynamische Verhalten besser zu berücksichtigen. Es existieren diverse Sonderformen dieser Reduktion, im Weiteren soll sich auf die Fixed-Interface-Methode beschränkt werden /2/.

Analog zur statischen Kondensation wird der Vektor der physikalischen Koordinaten \mathbf{u} in *Master*- und *Slave*-Freiheitsgrade unterteilt. Eine RITZ-Transformation definiert diesen Vektor als Linearkombination der Zwangsdeformationen Φ_c und der natürlichen Moden Φ_n .

Die natürlichen Moden entsprechen den Eigenmoden der Struktur unter der Bedingung der Fixierung der *Master*-Freiheitsgrade.

Sie können also aus der Lösung des Eigenwertproblems (vgl. (3)) bestimmt werden.

$$\left(\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}\right)\Phi_n = \mathbf{0} \quad (3)$$

Die Zwangsdeformationen können durch Aufprägung einer separaten Einheitsverschiebung auf jeden *Master*-Freiheitsgrad bei gleichzeitiger Fixierung aller übrigen *Master*-Freiheitsgrade bestimmt werden (vgl. (4)).

$$\Phi_c = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (4)$$

Es ergibt sich folgende Transformation (5):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_c & \Phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{CMS}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dabei werden \mathbf{q}_n als modale Koordinaten bezeichnet.

Da sich dieser Beitrag schwerpunktmäßig mit der Simulation von Motorkomponenten beschäftigt, sollen am Beispiel eines Pleuel, welches für die Berechnung eines Kurbeltriebs unter Berücksichtigung der Gleitlagerung modelliert wurde, entsprechende Unterschiede beider Reduktionsverfahren dargestellt werden.

Die Güte der Reduktion und die anschließende Verwendbarkeit für komplexe Belastungsfälle ist bei beiden vorgestellten Varianten von der Wahl und der Anzahl der nicht reduzierten Freiheitsgrade abhängig, welche nach der Reduktion in Form von Markern für die Einleitung von Kräften und Momenten zur Verfügung stehen. Es werden für ausgewählte Beispiele die entstehenden Abweichungen in den Ergebnisgrößen dargestellt. Die Abweichungen der einzelnen Reduktionsmethoden lassen sich an den resultierenden Eigenfrequenzen darstellen, wobei die Eigenformen und ihre Reihenfolge unverändert bleiben.

Das verwendete Pleuel wurde, wie in **Abbildung 1** dargestellt, vom verwendeten FE-Modell auf ein entsprechendes MKS-Modell mit einer definierten Anzahl von Markern in der Lagerschale und einer geringen Anzahl zur Abbildung der globalen Deformation im Pleuelsteg reduziert. Dabei ist es wichtig bei symmetrischen Strukturen auch die Wahl der *Master*-Freiheitsgrade symmetrisch vorzunehmen. Wird dies nicht beachtet, kommt es aufgrund der Reduktion zu unsymmetrischen Eigenformen, welche unphysikalisch sind. Die Reduktion erfolgte mit dem FE-Programme ANSYS9.0 und wurde mit GUYAN, CRAIG-BAMPTON mit 20 natürlichen Moden sowie CRAIG-BAMPTON mit 60 natürlichen Moden durchgeführt.

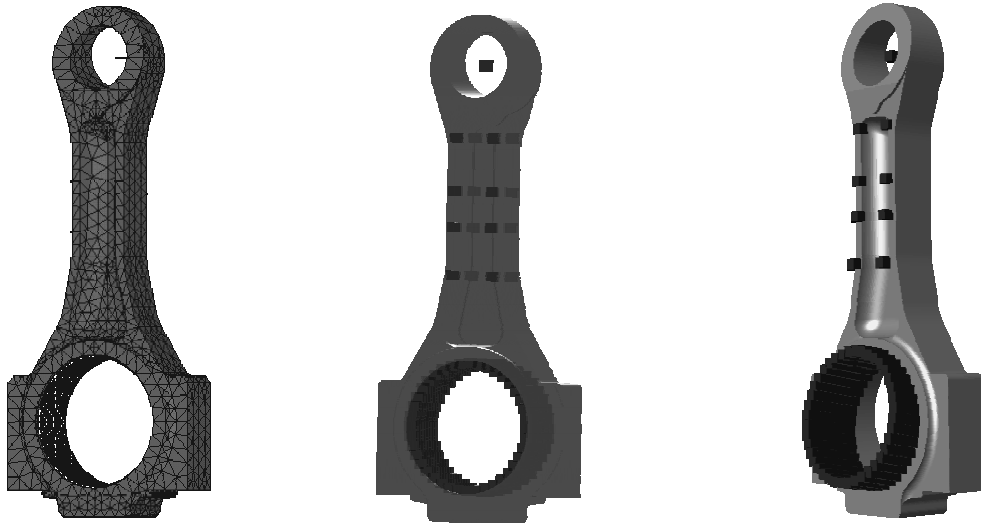


Abbildung 1: FE-Modell

MKS-Modell mit Markern

1. Eigenform MKS-Modell

Die resultierenden Eigenfrequenzen sind in **Tabelle 1** dargestellt.

GUYAN [Hz]	CRAIG-BAMPTON 20 Φ_n [Hz]	CRAIG-BAMPTON 60 Φ_n [Hz]
333.0014	332.9919	332.9916
972.7908	972.4894	972.4863
2184.0681	2180.8892	2180.7888
2667.7356	2662.8210	2662.6475
4321.9507	4311.8320	4310.1001
7277.5986	7234.1929	7224.6152
7978.9355	7864.4341	7861.8086
9732.5977	9626.4170	9604.6602
9964.3135	9816.1611	9806.9561
10080.8340	9915.4121	9879.1748

Tabelle 1: Vergleich der Eigenfrequenzen

Wie zu erwarten, stimmen die niedrigen Eigenfrequenzen zwischen den verschiedenen Varianten gut überein, mit Zunahme der Eigenfrequenzen werden die Unterschiede allerdings immer gravierender (in der 10. Eigenfrequenz treten Unterschiede von etwa 2% zwischen der GUYAN Reduktion und der CRAIG-BAMPTON Reduktion mit 60 natürlichen Moden auf). Ob und in welcher Weise diese Abweichungen Einfluss auf die Rechenergebnisse besitzen, hängt vorrangig von der Anwendung ab.

Bei der Simulation von Motorkomponenten und den sich daraus ergebenden komplexen tribomechanischen Systemen, ist die Anregung der Struktur entscheidend.

In **Abbildung 2** ist der Kraftverlauf des Zündstoßes eines Vierzylinder-Dieselmotors bei 4000u/min dargestellt. Dies stellt eine typische Belastung des Pleuels dar, wie sie für Untersuchungen zur Auslegung von Gleitlagern berücksichtigt werden muss. Führt man von diesem Signal eine FOURIER-Transformation durch, erhält man die Anregungsfrequenzen des Pleuel, welche vorrangig bis 600Hz dominant sind.

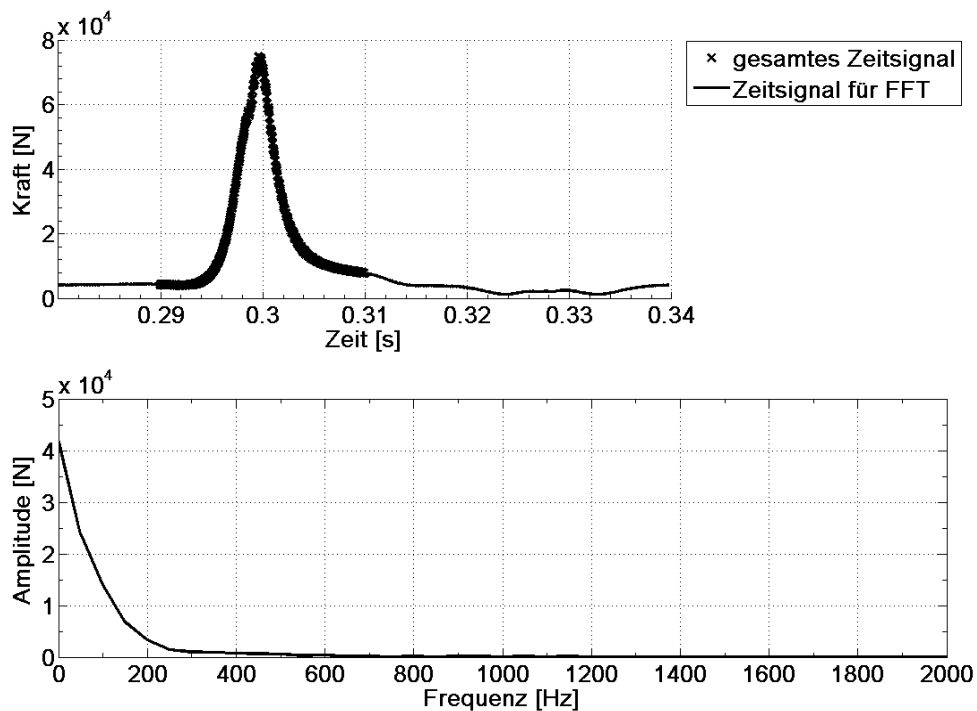


Abbildung 2: Anregung (oben) – Anregungsspektrum (unten)

In diesem Frequenzbereich weichen die Eigenfrequenzen der reduzierten Pleuel um weniger als 1% ab. Eine Verwendung der aufwändigeren CRAIG-BAMPTON Reduktion führt wie in **Abbildung 3** und **Abbildung 4** dargestellt zu Abweichungen für den kleinsten Schmierpalt und den maximalen Druck von weniger als 5%. Detaillierte Informationen zu den Algorithmen der Berücksichtigung von tribologischen Systemen in MKS-Programmen finden sich unter /3/.

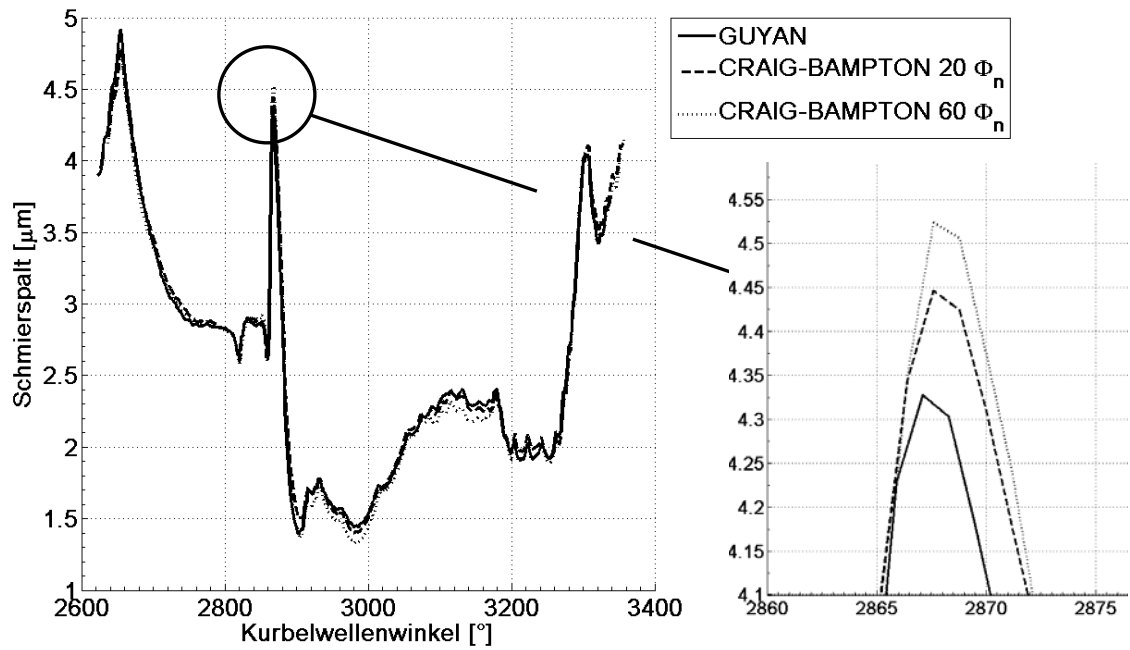


Abbildung 3: Kleinster Schmierspalt

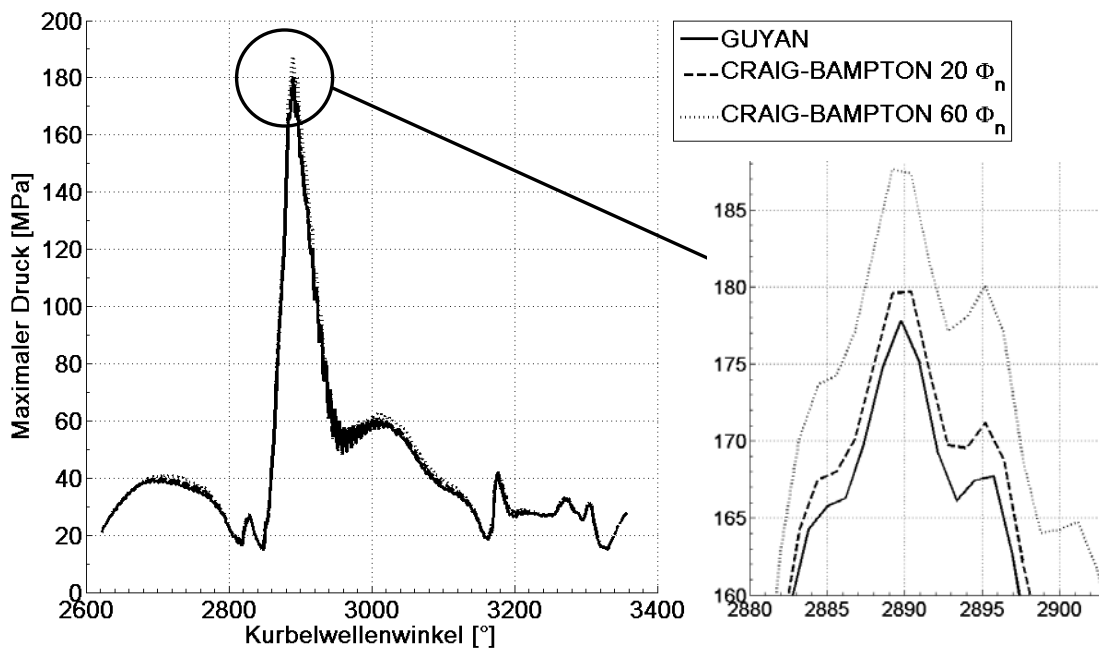


Abbildung 4: Maximaler Druck

1.2 Anhängigkeit der Simulationsgüte von der Anzahl der Eigenmoden

Bei der Berücksichtigung elastischer Strukturen für dynamische Untersuchungen, kommt der Auswahl der zur Beschreibung der elastischen Deformation in MKS-Programmen notwendigen Eigenmoden eine entscheidende Rolle zu. Zur Abbildung der globalen Deformation des Pleuels genügen wenige Eigenmoden. Aufgrund der lokal beschränkten Wirkung des Druckbergs und der resultierenden Verformung wird allerdings eine deutlich höhere Anzahl Eigenmoden zur Berücksichtigung der lokalen Deformationen benötigt. Die genaue Anzahl ist problemspezifisch, liegt allerdings in der Regel im Bereich über 100 Eigenvektoren.

Die Auswirkung der Wahl der Eigenmoden auf die Abbildbarkeit lokaler Deformation ist in **Abbildung 5** dargestellt.

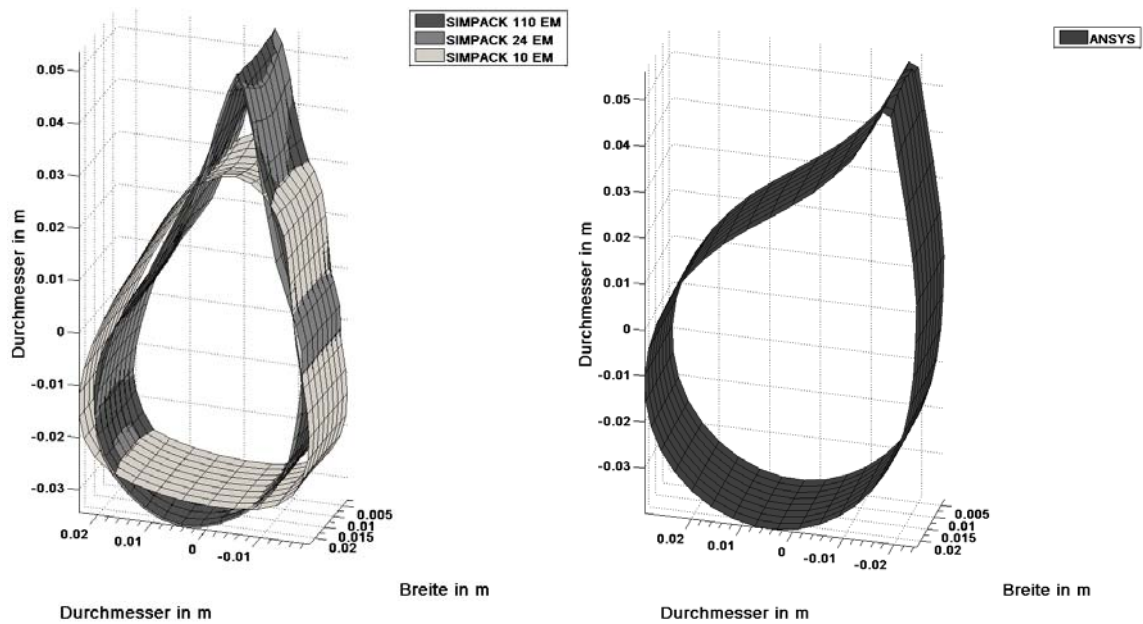


Abbildung 5: Deformation der Lagerschale (500fach überhöht)

Die zu einem Zeitpunkt t wirkenden Kräfte einer starren Gleitlagerrechnung wurden auf das unreduzierte FE-Modell des Pleuels aufgeprägt und dienten als Referenzwerte.

Die Deformationen mit 24 und 110 Eigenmoden zeigen global das gleiche Verhalten, der Verlauf der Verformung in Breitenrichtung weist allerdings im Bereich des Druckmaximums Unterschiede auf (siehe **Abbildung 6**).

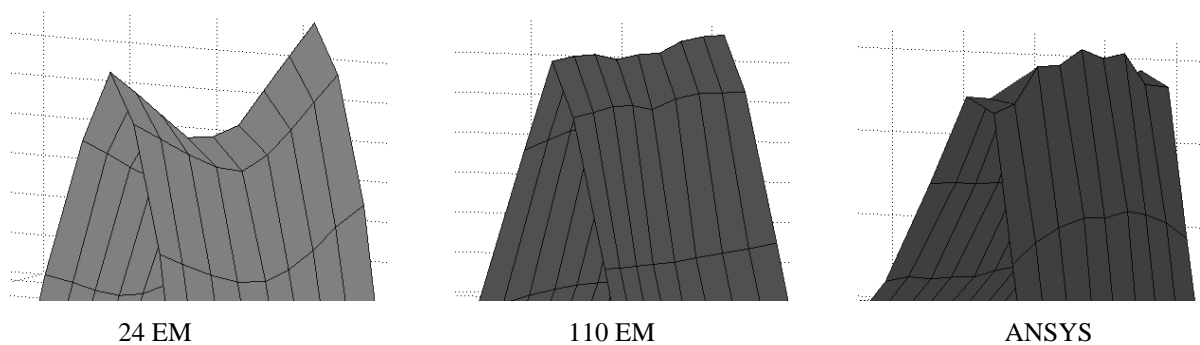


Abbildung 6: lokale Verformung der Lagerschale

Ausgehend vom Verlauf des Druckbergs in Breitenrichtung wird in der Mitte des Lagers die größte radiale Deformation erwartet. Bei 24 Eigenvektoren ist der Verlauf der Schalenverformung in Breitenrichtung konvex, die ANSYS Lösung liefert jedoch eine konkave Deformation, wie sie bei 110 Eigenvektoren bereits besser zu erkennen ist. Die elastische Deformation des Pleuels beeinflusst drastisch den resultierenden Druck der Gleitlagerrechnung, welcher bei einer zu geringen Anzahl von Eigenvektoren zu hoch berechnet wird.

2. Reduktion elastischer Körper unter Verwendung dynamischer Steifigkeitsmatrizen

Eine weitere Möglichkeit der Reduktion elastischer Körper ist die Verwendung dynamischer Steifigkeitsmatrizen. Dieses Verfahren ist in seinen Grundzügen z.B. für Anwendungen in der Rotordynamik schon seit mehr als 30 Jahren bekannt, wurde aber u.a. aufgrund der steigender Rechnerleistung und den kaum noch vorhandenen Beschränkung in den Modellgrößen wenig verwendet. In der Kopplung elastischer Strukturen zu MKS-Programmen bietet sich nun aber ein überaus sinnvolles Anwendungsgebiet dieser Methode.

In **Abbildung 7** ist ein Modell dargestellt, welches in Haupt- und Substruktur unterteilt wurde, wobei die Substruktur für weitere Rechnungen reduziert werden soll.

Für harmonische Rechnungen kann die partikuläre Lösung in Form von **(6)** formuliert werden /4/.

$$\underline{\mathbf{K}}(\omega) \hat{\underline{\mathbf{u}}} = \hat{\underline{\mathbf{f}}}^2 \quad (6)$$

Mit der komplexen dynamische Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}(\omega)$,

dem komplexen Vektor der Amplituden $\hat{\underline{\mathbf{u}}}$ und der Anregungskraft $\hat{\underline{\mathbf{f}}}$.

Für die Hauptstruktur bzw. die Substruktur können **(7)** bzw. **(8)** allgemein formuliert werden

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{HH} & \underline{\mathbf{K}}_{HK} \\ \underline{\mathbf{K}}_{KH} & \underline{\mathbf{K}}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{u}}}_H \\ \hat{\underline{\mathbf{u}}}_K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{f}}}_H \\ \hat{\underline{\mathbf{f}}}_K^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{SS} & \underline{\mathbf{K}}_{SK} \\ \underline{\mathbf{K}}_{KS} & \underline{\mathbf{K}}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{u}}}_S \\ \hat{\underline{\mathbf{u}}}_K^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{f}}}_S \\ \hat{\underline{\mathbf{f}}}_K^{**} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Aufgrund der Kopplung müssen die Kompatibilitätsbedingungen nach **(9)** gewährleistet sein.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{u}}}_K^* &= \hat{\underline{\mathbf{u}}}_K^{**} \\ \hat{\underline{\mathbf{f}}}_K^{**} + \hat{\underline{\mathbf{f}}}_K^* &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

Das sich ergebende Gleichungssystem für die reduzierte Struktur ist in **(10)** dargestellt.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{HH} + \underline{\mathbf{K}}_{Sub} & \underline{\mathbf{K}}_{HK} \\ \underline{\mathbf{K}}_{KH} & \underline{\mathbf{K}}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{u}}}_H \\ \hat{\underline{\mathbf{u}}}_K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{f}}}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Zur Bestimmung der dynamischen Steifigkeitsmatrix der Substruktur $\underline{\mathbf{K}}_{Sub}$ wird die zu reduzierende elastische Struktur (**Abbildung 7**, unten) an denjenigen Knoten und in den Freiheitsgraden, welche nach der Reduktion noch vorhanden sein sollen, über den zu betrachtenden Frequenzbereich harmonisch mit einer Einheitslast angeregt. Aus dieser Analyse lässt sich eine komplexwertige Nachgiebigkeitsmatrix in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz aufstellen, welche nach Inversion auf die komplexe Steifigkeitsmatrix führt. Eine Aufspaltung der resultierenden Matrix in Real- und Imaginärteil führt unmittelbar auf Matrizen, die der Gesamtsteifigkeitsmatrix bzw. der Gesamtdämpfungsmatrix an den Koppelstellen hinzuaddiert werden können

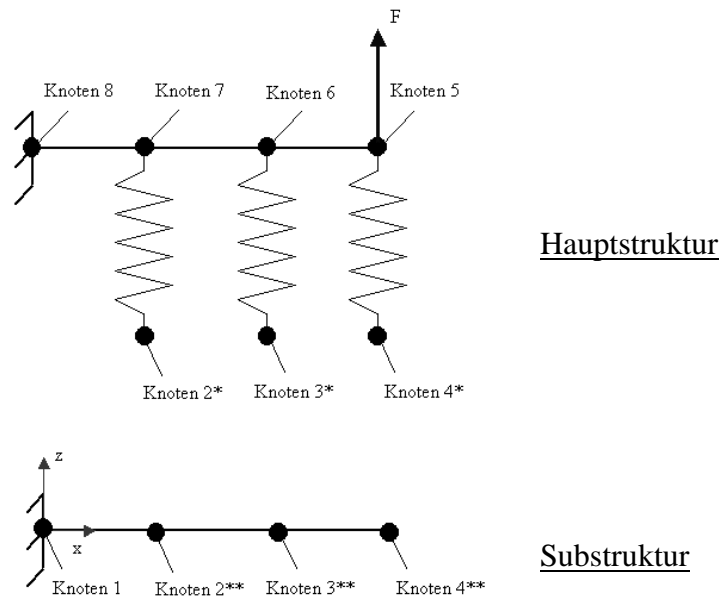
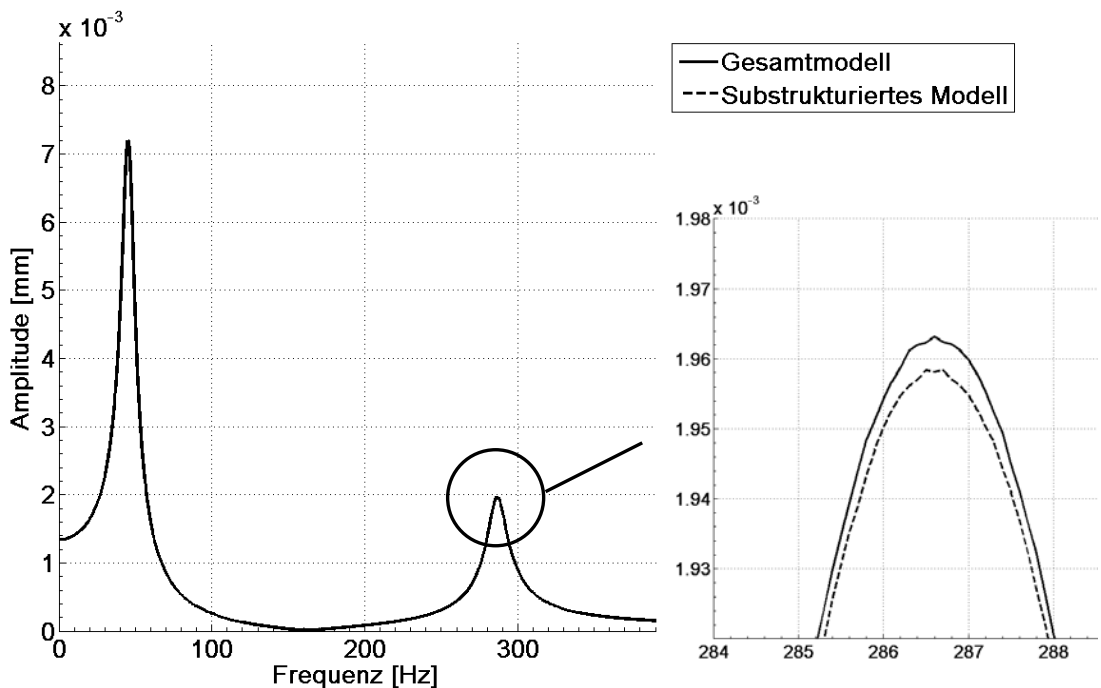


Abbildung 7: Testmodell. Das über die Federn gekoppelte Modell wird in eine Sub- und Hauptstruktur zerlegt.

Die Nachteile des Verfahrens sind durch die von der Anregungsfrequenz abhängigen resultierenden Matrizen definiert. Daraus resultiert eine Beschränkung dieses Reduktionsverfahrens auf harmonische Analysen.

Die Vorteile des Verfahrens liegen zum einen in der Rechenzeit, welche nach der Reduktion des Modells für weitere Simulationen benötigt wird, sowie in der im Rahmen der Diskretisierung gewährleisteten Exaktheit des Verfahrens (vgl. **Abbildung 8**). Zum anderen bietet dieses Verfahren die Möglichkeit der dezentralen Bearbeitung eines Gesamtprojekts und einer daraus resultierenden Kapselung.



Aufgrund der leicht programmierbaren Schnittstelle, kann unter Verwendung dynamischer Steifigkeitsmatrizen das Programm zur Anwendung kommen, welches für die jeweilige Teilaufgabe die beste Eignung besitzt. Außerdem kann nach Reduktion des Teilmodells nicht mehr auf das Ausgangsmodell geschlussfolgert werden, was in Bezug auf Sicherung von „Know How“ oder Geheimhaltung einen großen Vorteil darstellen kann.

Das Verfahren lässt sich in der Automobilindustrie für verschiedenste Anwendungen benutzen, z.B. bei der Berechnung des dynamischen Verhaltens des Motors unter Berücksichtigung der elastischen Lagerung durch die Karosserie.

Zusätzlich besteht die vergleichsweise leichte Implementierung experimentell ermittelter Parameter zur Abbildung elastischer Strukturen.

Dieses Verfahren wurde von den Autoren für die Berücksichtigung des elastische Fundaments in der rotordynamischen Berechnung von Kraftwerksturbosätzen entwickelt und findet z.B. bei Siemens mit Erfolg Anwendung.

Literatur

- /1/ ANSYS 9.0 Referenz Manual; 2004
- /2/ Craig, R. R. Jr.; Bampton, M. C. C; Coupling of Substructures for Dynamic Analysis, AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313-1319.
- /3/ Daniel, C. et al.; Integration von Tribosystemen in MKS Modelle am Beispiel von Motorkomponenten; Tagungsband 8, Magdeburger-Maschinenbautage; C1; 2007
- /4/ Krämer, E.; Dynamics of Rotor and Foundations
- /5/ SIMPACK Referenz Manual, SIMDOC v8.7; 2004