

## Modellierung von Gleitlagern in rotordynamischen Modellen

### **Christian Daniel**

Institut für Mechanik  
Otto-von-Guericke-Universität  
39106 Magdeburg, Deutschland  
christian.daniel@ovgu.de

### **Jens Strackeljan**

Institut für Mechanik  
Otto-von-Guericke-Universität  
39106 Magdeburg, Deutschland  
jens.strackeljan@ovgu.de

### **Elmar Woschke**

Institut für Mechanik  
Otto-von-Guericke-Universität  
39106 Magdeburg, Deutschland  
elmar.woschke@ovgu.de

### **ABSTRACT**

Gleitlager sind ein wichtiger Bestandteil heutiger Maschinenkonstruktionen. Durch die steigenden Anforderungen an alle Maschinenkomponenten bezüglich ihrer Lebensdauer müssen deren Eigenschaften möglichst exakt beschrieben werden.

Es existiert eine breite Palette an Berechnungsmethoden von analytischen Näherungslösungen wie der Kurzlagertheorie bis zur direkten Lösung der Schmierfilmgleichung im Spalt. Für große rotordynamische Systeme mit mehreren Gleitlagern werden aus Gründen der Rechenzeit nur Näherungslösungen verwendet. Im Bereich der Berechnung von Verbrennungsmotoren werden bereits direkte Lösungen für die Schmierfilmgleichung verwendet, die aber eine drastische Erhöhung der Rechenzeit zur Folge haben, so dass diese für den praktischen Einsatz immer noch wenig verbreitet sind.

Im Bereich der Mehrkörpersysteme (MKS) kommen mehrere Berechnungsmethoden zum Einsatz. Die erste Stufe verwendet Kennfeldlösung, welche besonders rechenzeiteffizient ist. Dabei werden für bestimmte Wellenpositionen Lagerkräfte in einem Kennfeld abgelegt. Problematisch ist dabei die Überlagerung der Wellenverlagerung mit einer Wellenschiefstellung. Die so entstehenden Lagermomente können durch die direkte Lösung der Schmierfilmgleichung berechnet werden. Die Vernachlässigung der Schiefstellung im Gleitlager kann das Systemverhalten massiv beeinflussen, was besonders bei mehreren Gleitlagern auf einer Welle entscheidend sein kann. Daher werden in diesem Beitrag verschiedene Modellierungsmethoden für Gleitlagerungen in MKS vorgestellt und auf ihre praktische Umsetzbarkeit untersucht.

### **KEY WORDS**

Gleitlager, MKS, EHD

### **1 EINLEITUNG**

Um eine Verbesserung bei der Güte von Lagerkraftberechnungen zu erzielen, müssen prinzipiell unterschiedliche Simulationsansätze der Mechanik miteinander gekoppelt werden. Gleitlager werden häufig mit quasistatischen Methoden berechnet. Dabei werden Tragkräfte vorgegeben und die zugehörige Wellenverlagerung berechnet. Die Ermittlung der Tragkräfte kann aus Messungen oder aus vorgelagerten Simulationen mit einem Mehrkörpersystem erfolgen. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass das Gleitlager völlig entkoppelt von der betrachteten Maschine ist. Dies ist vor allem dann problematisch, wenn elastische Deformationen des Systems Einfluss auf die Lagerkräfte haben.

Das Ziel einer möglichst genauen Gleitlagerberechnung sollte damit eine ganzheitliche Abbildung der Maschinendynamik und der Fluidmechanik im Lagerspalt sein.

Problemstellungen der Maschinendynamik werden üblicherweise durch ein Mehrkörpersystem abgebildet, während

für die Berechnung elastischer Strukturen in der Regel Finite-Element-Methoden (FEM) zum Einsatz kommen, was jedoch wegen der großen Zahl der Freiheitsgrade für eine transiente Rechnung praktisch nicht realisierbar ist. Mit einer entsprechenden Reduktion können elastische Strukturen auch im Mehrkörpersystem eingebunden werden, wobei die Strukturen auf wenige hundert modale Freiheitsgrade reduziert werden.

Die Fluidmechanik arbeitet im Gegensatz zur Maschinendynamik auf einer viel kleineren Dimensionsskala. Zur Abbildung der Effekte im Schmierpalt muss der Spalt mit einer entsprechend kleinen Diskretisierung versehen werden. Auf diesem diskreten Netz wird die Schmierfilmgleichung gelöst, welche durch die REYNOLDS-Gleichung repräsentiert wird. Dies ist eine partielle Differentialgleichung, die den Zusammenhang zwischen Spaltweite und Druck beschreibt. Die Lösung erfolgt häufig mit einer Finite-Differenzen-Methode, welche ein lineares Gleichungssystem erzeugt. Jenes ist schwach besetzt und sollte daher mit einem speziellen Gleichungslöser behandelt werden.

Die Verbindung beider Verfahren führt zu einer gekoppelten Berechnung von Maschinendynamik und Hydrodynamik. Im einfachsten Fall kann dies über eine CO-Simulation realisiert werden. Dabei laufen beide Solver nebeneinander und tauschen zu diskreten Zeitpunkten ihre Input- und Outputgrößen aus. Dies wird von vielen kommerziellen Programmsystemen unterstützt, hat sich aber in der gekoppelten Gleitlagersimulation als nicht praktikabel erwiesen.

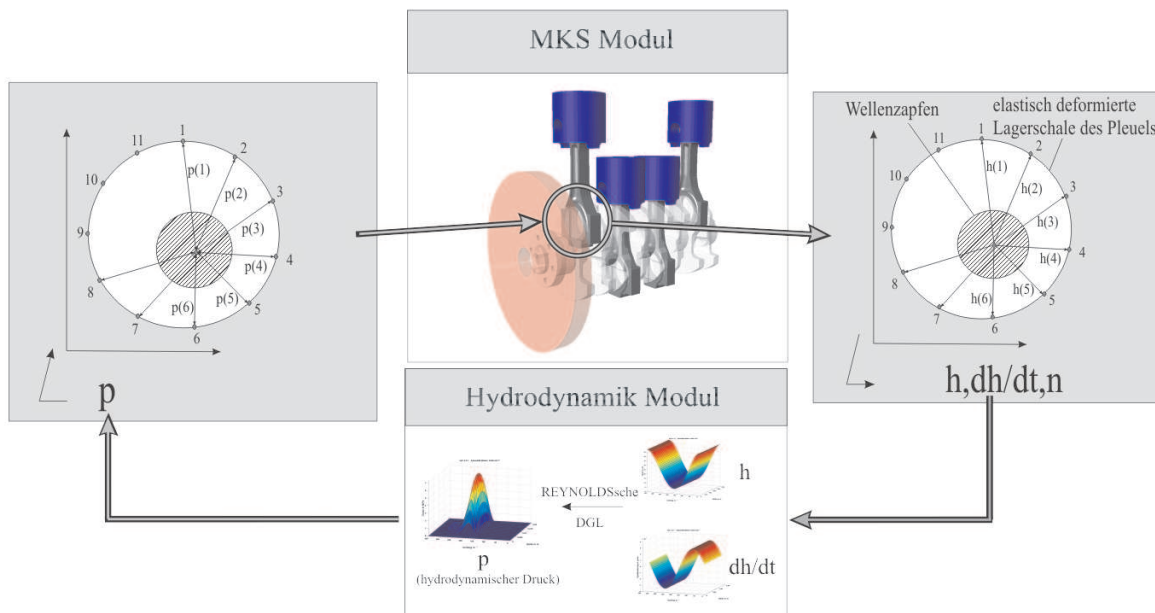
Eine weitere Möglichkeit ist das direkte Einbinden der Schmierfilmgleichung in das Mehrkörpersystem. Dies leistet die Modellkopplung, da beide Modelle in einem Code vorliegen und von einem Solver gelöst werden. Wegen der schwach besetzten Systemmatrix, die die Finiten-Differenzen für die REYNOLDS-Gleichung liefert, ist dies nicht effizient. Daher wird die REYNOLDS-Gleichung zwar im MKS-Programm gelöst, aber unter Verwendung eines speziellen Solvers.

## 2 THEORIE

### 2.1 Gleitlager in einer MKS-Umgebung

Die Einbindung der hydrodynamischen Kräfte erfolgt durch ein nutzerdefiniertes Kraftelement. Die häufig verbreiteten MKS-Programme SIMPACK, ADAMS oder RECURDYN unterstützen nutzerdefinierten Programmcode über spezielle FORTRAN Subroutinen.

Der Ablauf ist in allen Programmsystemen ähnlich, wobei der erste Teil der Subroutine die kinematischen Größen



**Abbildung 1:** Einbindung des Gleitlagers in die MKS-Umgebung.

des Gleitlagers im Lagerspalt bestimmt. Der Hauptteil ruft das Hydrodynamikmodul auf, welches die REYNOLDS-Gleichung auf einem vorgegebenen Gitter eigenständig löst. Im Anschluss wird die Druckverteilung in eine lokale

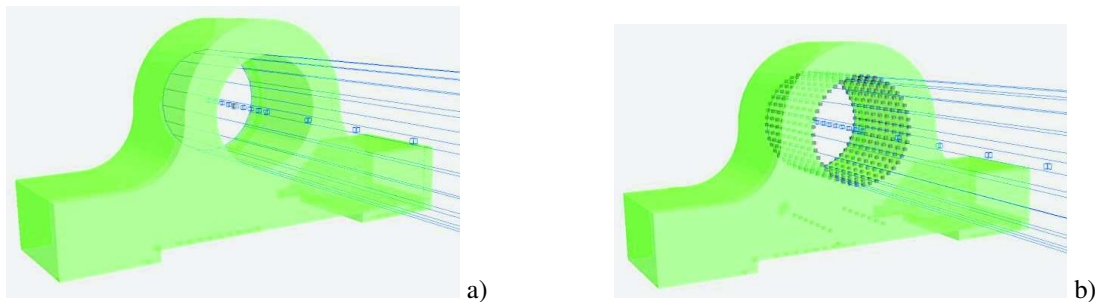
Knotenkraftverteilung umgerechnet. Jeder Knoten bzw. Marker der Gleitlagerschale und der Welle erhält so die Reaktionskraft des Schmierfilms im Gleitlager. Der Ablauf ist in Abbildung 1 dargestellt und gilt für starre und elastische Körper gleichermaßen.

Der hauptsächliche Grund die REYNOLDS-Gleichung in jedem Zeitschritt numerisch zu lösen, ergibt sich aus der damit verbundenen Erhöhung der Modellierungstiefe. Es können beliebige Lagergeometrien durch geringfügige Änderungen im Hydrodynamikmodul umgesetzt werden und darüber hinaus spezielle Effekte wie Kavitation und Massenerhaltung im Schmierfilm bei der numerischen Lösung berücksichtigt werden.

Weiterhin wird die Schiefstellung der Welle, welche die Strömung im Schmierpalt und die resultierende Tragkraft massiv beeinflusst, berücksichtigt. Die gebräuchlichsten Verfahren, wie Lagerkoeffizienten oder Kennfeldlösung, können diese Effekte nicht abbilden.

## 2.2 Modellierungsstufen

Für das Mehrkörpersystem SIMPACK wurden zwei grundsätzliche Modellierungsstufen entwickelt. Die erste berücksichtigt die Verbindung zwischen Welle und Lagerschale über zwei Marker - Abbildung 2 a. Somit sind bei dieser Umsetzung die Lagerpartner starr und können sich nicht lokal verformen. Diese Modellierungsstufe wird in der Literatur als HD-Gleitlager bezeichnet, weil nur die Hydrodynamik berücksichtigt wird. Ist ein Lagerpartner ein elastischer Körper erfolgt die Anbindung zum Kontaktpartner über ein RBE3<sup>1</sup> Element, was in der Literatur auch als (E)HD Kontakt bezeichnet wird, da zumindest die globalen Verformungen des Körpers den Lagerspalt beeinflussen können.



**Abbildung 2:** Modellierungsstufen a) Stufe eins und b) Stufe zwei

Die zweite Modellierungsstufe sieht einen flächigen Kontakt zwischen den Lagerpartnern vor. Dabei wird die Kontaktzone mit einem regelmäßigem Netz von Markern versehen, um lokale Deformationen abbilden zu können - siehe Abbildung 2 b. So sind lokale Deformationen im Schmierpalt enthalten und beeinflussen den hydrodynamischen Druckaufbau. Deshalb wird diese Umsetzung als EHD-Kontakt bezeichnet, da sowohl globale als auch lokale elastische Deformationen der Kontaktkörper den Schmierpalt verändern.

Ein Vorteil der höheren Modellierungsstufe zwei liegt in der Möglichkeit sehr schnell auch einen HD-Kontakt zu realisieren, denn SIMPACK bietet die Möglichkeit elastische Körper zu erstarren, so dass mit einem EHD-Modell auch eine HD-Rechnung durchgeführt werden, was in der Regel weniger Rechenaufwand verursacht.

Dennoch erfordert diese Umsetzung einen erheblichen Modellierungsaufwand, da die elastischen Körper mit einem regelmäßigem Netz von Knoten in der Kontaktzone erstellt werden müssen. Die Modellierungsstufe eins (Abbildung 2 a) ist bei Großmodellen vorzuziehen, da die Lagerschale nur über einen Knoten in der Lagermitte verfügen muss.

## 2.3 Numerische Lösung der REYNOLDS-Gleichung

Die grundlegende Gleichung, die den Zusammenhang zwischen Spaltweite und Druckverteilung im Schmierfilm des Radialgleitlagers beschreibt, ist die REYNOLDS-Differentialgleichung.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = u_m \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Rigid Boundary Elements 3D - die mechanischen Freiheitsgrade von mehreren Knoten werden durch Zwangsbedingungen eingeschränkt und zu einem neuen Knoten zusammengefasst.

Eine analytisch geschlossene Lösung existiert bis dato nicht. Die Lösung der partiellen Differentialgleichung lässt sich u.a. über die Finite-Differenzen-Methode erzielen. Sie liefert eine Druckverteilung in der auch negative Drücke enthalten sind. Da Fluide Zugkräfte nur in geringem Maße aufnehmen können ist diese Lösung falsch. Es müssen noch physikalische Randbedingungen eingearbeitet werden, wobei es mehrere Möglichkeiten gibt diese zu berücksichtigen. Die sehr einfache stellt die GÜMBEL-Randbedingungen dar. Diese setzen alle negativen Drücke zu Null, wodurch der Druckverlauf nicht mehr kontinuierlich ist und streng genommen die Kontinuitätsbedingung der REYNOLDS-Differentialgleichung nicht mehr erfüllt.

Eine Alternative sind die REYNOLDS-Randbedingungen, welche effizient mit iterativen Verfahren eingebracht werden können. In jedem Iterationsschritt der Gleichungslösung werden die negativen Drücke zu Null gesetzt. Die endgültige Lösung erfüllt die physikalischen Randbedingungen und die Kontinuitätsbedingungen der REYNOLDS-Gleichung.

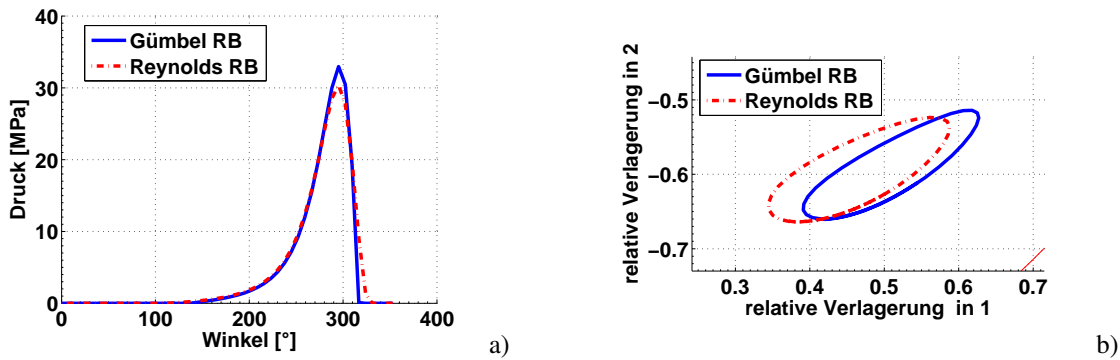


Abbildung 3: Druckverlauf in der Lagermitte a) ; Wellenverlagerung b)

Der verwendete Solver zur Lösung des linearen Gleichungssystems ist abhängig von den verwendeten physikalischen Randbedingungen. Die GÜMBEL-Randbedingungen lassen sich mit jedem Lösungsverfahren kombinieren. Das Gleichungssystem (2) wird dazu vollständig aufgebaut und kann mit einem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden. Am Ende der Berechnung werden die negativen Drücke im Lösungsvektor  $p$  korrigiert. Da die Systemmatrix  $\underline{A}$  sehr schwach besetzt ist, wird diese in eine eindimensionale Kompaktspeicherung überführt. Die Lösung von Gleichung (2) erfolgt im Hydrodynamik Modul mit einem PCG-Verfahren.

$$\underline{A} \cdot \underline{p} = \underline{R} \quad (2)$$

Die REYNOLDS-Randbedingungen können nur mit einem iterativen Lösungsverfahren wie dem GAUSS-SEIDEL-Verfahren realisiert werden [1]. Dabei wird nicht die gesamte Systemmatrix  $\underline{A}$  aufgebaut, sondern die Knotendrücke werden punktwise verändert bis die Residuen  $r_{i,j}$  der REYNOLDS-Differentialgleichung klein genug sind - Gleichung (3).

$$p_{i,j} = p_{i,j} + \omega \cdot \delta_{i,j}$$

$$\delta_{i,j} = \frac{-r_{i,j}}{f(h_x, h_y)} \quad (3)$$

$$r_{i,j} = R_{i,j} - LU(i, j)$$

Die Funktion  $LU(i, j)$  stellt die Auswertung des Finite Differenzensterns der REYNOLDS-Gleichung am Gitterpunkt  $(i, j)$  dar,  $h_x$  und  $h_y$  sind Gittergrößen und  $\omega$  ist der Relaxationsfaktor der GAUSS-SEIDEL-Relaxation. Abbildung 3 zeigt den Vergleich bei einem ebenen gleitgelagertem Rotor, welcher mit einer konstanten Last von  $10kN$  und einer drehfrequent umlaufenden Kraft von  $3kN$  belastet wird. Der Druckverlauf in Abbildung 3 a zeigt den unstetigen Verlauf der GÜMBEL-Randbedingung am Übergang zum Kavitationsgebiet. Die Wellenverlagerung in Abbildung 3 b zeigt die geringen Unterschiede zwischen den Verfahren.

Letztendlich entscheidet der Anwendungsfall über die Wahl der Randbedingungen, da der Unterschied zwischen beiden Lösungen nur lokale Veränderungen am gesamten Druckberg hat. Die Variante mit dem PCG-Verfahren ist bei gleicher Lösungsgenauigkeit in der Zeitintegration um den Faktor fünf schneller als die physikalisch korrekte Variante mit dem GAUSS-SEIDEL-Verfahren.

### 3 MOTIVATION ZUR IMPLEMENTIERUNG

Im Rahmen des Forschungsprojektes COMO (COmpetence in MObility) tragen die Autoren zur Entwicklung eines reibungsreduzierten Dieselmotors bei. Die numerischen Berechnungen erfolgen mit einem Mehrkörpermodell welches durch nutzerdefinierte Kraftelemente erweitert wird. Kommerziell verfügbare Systeme könnten die Berechnung ähnlich durchführen, aber die Transparenz dieser Modelle ist nicht gegeben.

Weiterhin wird die Schnittstelle zur Hydrodynamik genutzt, um tribologische Modelle anzukoppeln, welche mehr Effekte berücksichtigen, als in diesem Beitrag beschrieben sind. So werden die quasistatischen Berechnungsmethoden für hochdynamische Vorgänge ersetzt durch volldynamische Berechnungen.

## 4 BEISPIELE

### 4.1 Einfacher Rotor in zwei Lagern

Ein Rotor auf einer elastischen Welle in zwei Lagern eignet sich gut, um die auftretenden Effekte bei den verschiedenen Modellierungsstufen aufzuzeigen - Abbildung 6. Die Welle ist mit TIMOSHENKO Balkenelementen diskretisiert, da die maßgebliche Deformation die Durchbiegung der Welle ist. Das Stehlager müssen hingegen mit Volumenelementen diskretisiert werden, um lokale Deformationen der Lagerschale in radialer Richtung zu erfassen. Durch die Variation der Modellierung des Stehlagers sind drei Varianten erstellt worden. In der einfachsten Modellierungsstufe ist die Lagerschale durch ein RBE3 Element in der Bohrungsmitte zu einem Knoten zusammengefasst, wogegen die aufwendigste Variante 40 x 11 Knoten zur Kopplung an die Balkenknoten vorsieht. Zudem wird bei bestimmten Varianten die Schiefstellung in den Lagern vernachlässigt. Der Lastfall sieht

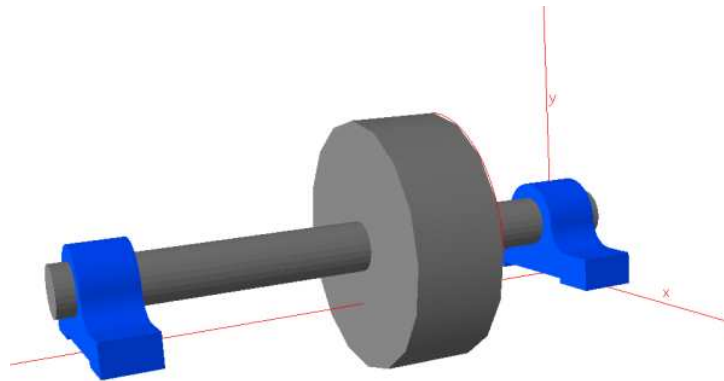


Abbildung 4: MKS-Modell des elastisch gelagerten Rotors

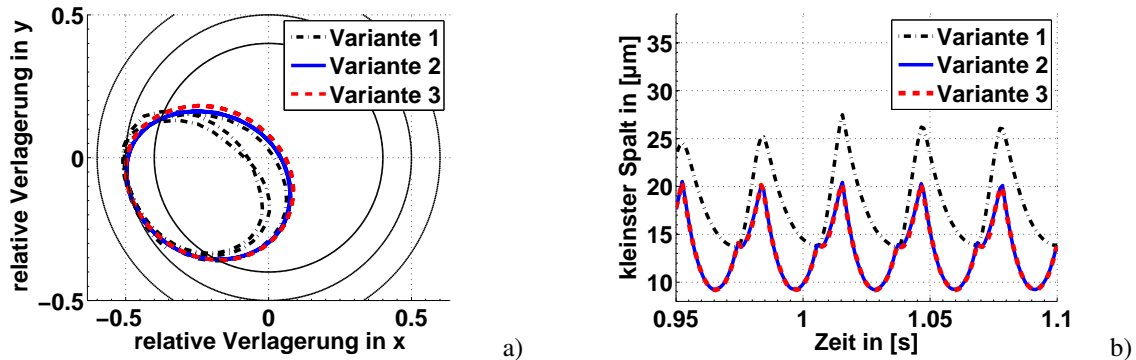
eine Winkelgeschwindigkeit des Rotors von  $\Omega = 200\text{rad/s}$  vor. Der Rotor wird mit einer konstanten radial wirkenden Kraft und einer Unwucht versehen. So wird eine Durchbiegung der Welle und eine Schiefstellung in den Lagerstellen erzwungen.

Variante	Gleitlager	Schiefstellung
1	HD	nein
2	HD	ja
3	EHD	ja

Tabelle 1: Eigenschaften der betrachteten Varianten

Der Vergleich der Wellenverlagerung fällt schwer, da bei einer schiefgestellten Welle, die Verlagerung des Wellenmittelpunkts abhängig von der axialen Position im Lager ist. Um dennoch einen Vergleich anstellen zu können, wird die Wellenverlagerung in der Lagermitte verglichen. Zudem wird der Verlauf des kleinsten Schmierpaltres betrachtet, welcher die Folgen der Schiefstellung am stärksten widerspiegelt.

Der Verlauf der Wellenverlagerung in Abbildung 5 a ist ähnlich, Variante 1 enthält jedoch noch keine stationäre



**Abbildung 5:** Unterschiedliche Modellierungsstufen a) Wellenverlagerung b) kleinster Schmierpalt

Lösung. Die Unwuchtschwingung wird noch von Anfangsstörungen überlagert, was sich in den unterschiedlich großen Verlagerungsbahnen widerspiegelt.

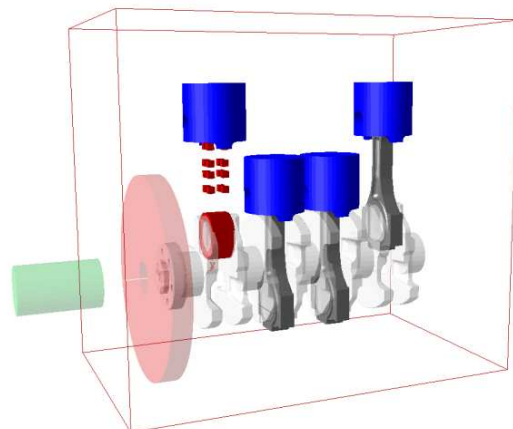
Der kleinste Schmierpalt in Abbildung 5 b ist bei der Vernachlässigung der Schiefstellung (Variante 1) größer. Damit wird bei der Berechnung mehr Sicherheit gegen Festkörperkontakt vorhergesagt, als eigentlich vorliegt.

Die instationäre Verlauf resultiert aus der Vernachlässigung der Lagermomente. Die Welle kann sich im Lager wie in einem Festlager bewegen, obwohl das Gleitlager eher eine Einspannung mit Spiel darstellt.

Bei dem ausgewählten Beispiel unterscheiden sich HD (Variante 2) und EHD Lösung (Variante 3) nicht sehr stark. Die Ergebnisse sind nahezu deckungsgleich, weil die lokalen Deformationen der Lagerschale eine untergeordnete Rolle spielen, während die Durchbiegung der Welle dominant ist. In Abschnitt 4.2 wird ein Beispiel vorgestellt, bei dem die lokalen Deformationen der Lagerschale maßgeblichen Einfluss auf den Druckaufbau haben.

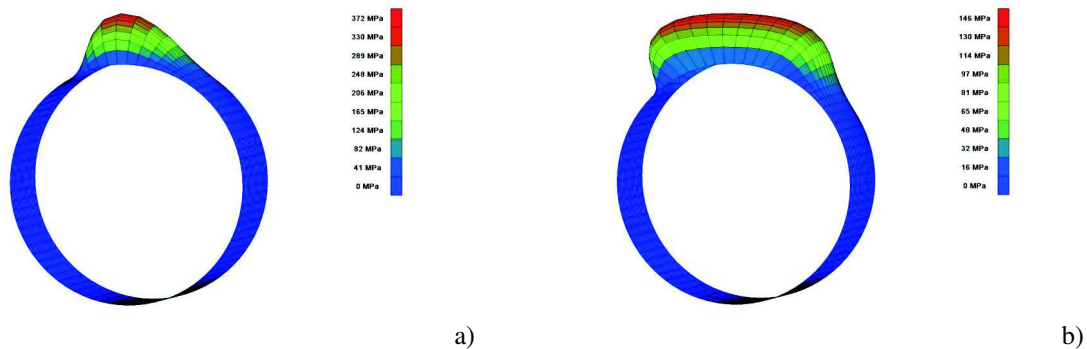
#### 4.2 EHD Pleuellager

Erste EHD-Rechnungen fanden an einem vereinfachten Vierzylinder- Kurbeltrieb statt. Die Schiefstellung der Kurbelwelle wurde verhindert, so dass im Lager des großen Pleuelauges immer ein Parallelspalt vorherrscht. Dieses Vorgehen stellt eine starke Modellvereinfachung dar, sollte aber aus Gründen der Vergleichbarkeit zu quasistatischen Gleitlagerberechnung in dieser Modellierungsart ausgeführt werden. In Abbildung 6 ist das MKS-Modell



**Abbildung 6:** starrer Kurbeltrieb mit EHD Pleuellager

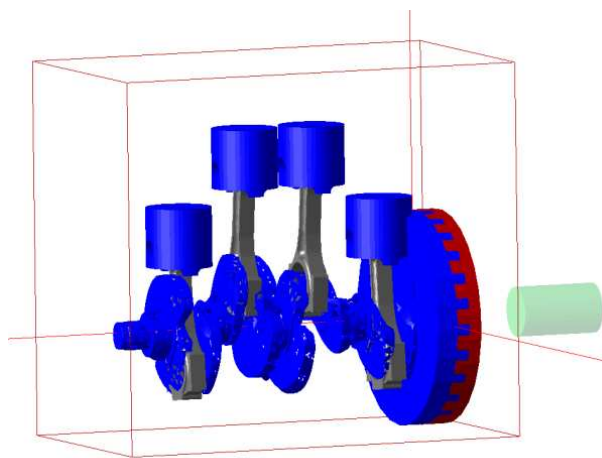
mit dem elastischen Pleuel dargestellt. Sichtbar sind nur die Hauptfreiheitsgrade des elastischen Pleuels. Abbildung 7 zeigt berechnete Druckverläufe für das EHD Gleitlager im großen Pleuelauge eines Dieselmotors. Beide Darstellungen zeigen den Druckverlauf im oberen Totpunkt während der Zündung. Wie sich zeigt, beeinflussen



**Abbildung 7:** Druckverteilung OT ZP(4000 U/min) im großen Pleuellager a) HD und b) EHD.

die lokalen Verformungen den Druckverlauf und den damit verbundenen maximalen Druck enorm. Der maximale Druck für den starren Fall (HD) ist größer als die Dauerfestigkeit des Lagerwerkstoffs, was im praktischen Einsatz zum Versagen führen würde. Der EHD-Fall liefert durch die lokalen elastischen Deformationen einen breiter gestreckten Druckberg, welcher bei geringerem Maximaldruck die gleiche Tragfähigkeit besitzt.

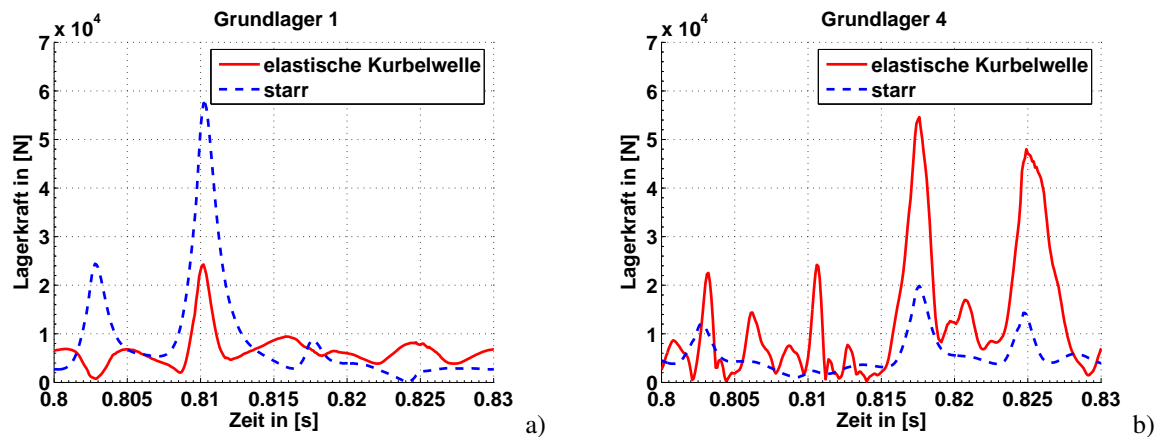
#### 4.3 Elastische Kurbelwelle in Gleitlagern



**Abbildung 8:** MKS-Modell mit elastischer Kurbelwelle OTZP - Zylinder 2 (400fach überhöht)

Bei der Auslegung einer Kurbelwelle in einem aktuellen Projekt wurde ein elastisches MKS-Modell aufgebaut - Abbildung 8. Hier sind alle Pleuele starr, nur die Kurbelwelle wurde als elastischer Körper implementiert. Das FE-Netz der Kurbelwelle ist relativ grob, wodurch Diskretisierungsfehler entstehen. Die Verschiebungen sollten damit dennoch hinreichend genau im MKS-Modell abgebildet sein. Für die anschließende Spannungsberechnung wird ein feineres Netz mit kleineren Elementen an den Übergängen der Kröpfungen und damit deutlich mehr Freiheitsgraden verwendet.

Das MKS-Modell beinhaltet insgesamt neun Gleitlager, bei denen die REYNOLDS-Gleichung in jedem Zeitschritt numerisch gelöst wird. Die Gleitlager sind zwar nur als (E)HD-Lager ausgeführt, zur Abschätzung der an den Grundlagern und Pleuelzapfen wirkenden Kräfte genügt dies aber. Die Notwendigkeit, die Kurbelwelle als



**Abbildung 9:** Grundlagerkräfte bei starrer und elastischer Kurbelwelle a) Grundlager 1 und b) Grundlager 4.

elastischen Körper abzubilden, zeigt Abbildung 9. Die Lagerkräfte in den fünf Grundlagern reagieren sehr empfindlich auf diese Modelländerung, wogegen die hier nicht abgebildeten Tragkräfte in den großen Pleuellagern nicht auf diese Änderung reagieren.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden Kraftelemente für kommerzielle MKS-Programme für Radialgleitlager entwickelt, welche eine voll numerische Lösung der REYNOLDS-Gleichung enthalten. Der Hauptgrund liegt in der genauen Abbildung aller kinematischen Effekte im Gleitlager. Bei Vernachlässigung der Schiefstellung und der Lagermomente wird das Systemverhalten nicht richtig abgebildet. Zudem erlaubt die numerische Lösung nun einen voll dynamischen EHD-Kontakt im Gleitlager, d.h. auch lokale Deformationen werden bei der Bestimmung der Spaltfunktion berücksichtigt und beeinflussen den Druckaufbau im Fluid.

Die numerische Näherungslösung der Schmierfilmgleichung kann in verschiedenen Genauigkeitsstufen durchgeführt werden, so dass für jeden Anwendungsfall mit einer passenden Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit gearbeitet werden kann.

## Literatur

- [1] C.H. Venner and A.A. Lubrecht, *Multilevel methods in lubrication*, Elsevier, Tribology Series 37, 2000
- [2] S. Thomas, *Analyse des Betriebsverhaltens von Kurbelwellengleitlagern mittels TEHD-Berechnungen*, Dissertation - Rhein-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2003
- [3] G. Knoll, K. Backhaus, J. Lang, K. Wilhelm, *Berechnung von Motorgleitlagern unter Berücksichtigung der Deformation* (Institut für Maschinenelemente und Konstruktionstechnik (IMK) Universität GH Kassel, 2004), <http://www.ist-aachen.com/tower1.pdf>
- [4] J. Krasser, O. Laback, B. Loibnegger, H. H. Pribsch, *Anwendung eines elastohydrodynamischen Verfahrens zur Berechnung von Kurbeltriebslagern* (MTZ Motortechnische Zeitschrift 55, 1994)
- [5] R. Schönen, *Srukurdynamische Mehrkörpersimulation des Verbrennungsmotors mit elastohydrodynamischer Grundlagerkopplung*, Dissertation - Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel, 8. Juni 2001
- [6] J. R. Lang, *Kolben-Zylinder-Dynamik* (Dissertation - Rhein-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1997)
- [7] B. Lüneburg, *Zur Berechnung der thermo-elasto-hydrodynamischen Kenngrößen stationär und instationär belasteter Gleitlager* (Dissertation - Technische Universität Clausthal, 1998)
- [8] G. Knoll, *Tragfähigkeit zylindrischer Gleitlager unter elastohydrodynamischen Bedingungen* Dissertation - Rhein-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1974