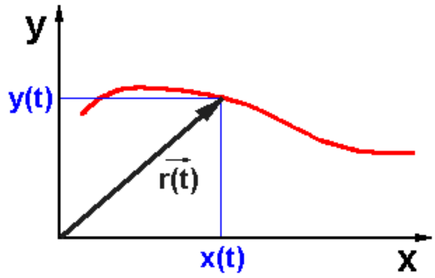
Differentiation eines Vektors nach einem Skalar

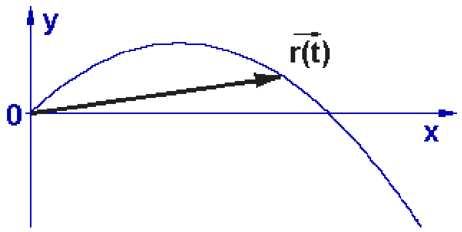
Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Darstellung der betrachteten Funktion in einer für die folgenden Operationen günstigen Form: die **Parameterdarstellung**

Bekannt ist diese Art der Darstellung bereits durch den „Ortsvektor“, einen Vektor, der mit seiner Spitze die Bahnkurve einer Bewegung begleitet.

Als Beispiel sei die Bahn eines Punktes in der x-y-Ebene dargestellt. Der Ortsvektor lässt sich in seinen Komponenten ***x(t)*** und ***y(t)*** als Funktion der Zeit, also als Funktion eines Parameters darstellen.



Als **physikalisches Beispiel** soll hier der schräge Wurf genannt sein.



Die Bewegungen entlang der x-Achse und entlang der y-Achse hängen vom Parameter Zeit ab und überlagern sich, so dass die Bewegung letztlich mit einem Ortsvektor beschrieben werden kann.

Entlang x erfolgt die Bewegung gleichförmig:

$x(t) = v_{0x}t$

Entlang y ergibt sich :

$y(t) = v_{0y}t - 0{,}5gt^2$

Der Ortsvektor ergibt sich somit zu:

$$\vec{r}(t) = \left(v_{0x}t;\ v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \right)$$

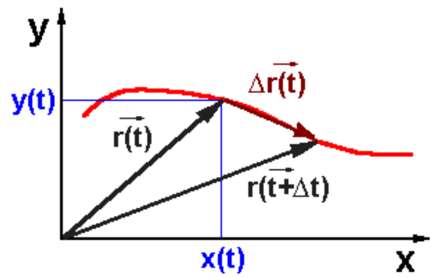
Unter günstigen Voraussetzungen lässt sich die Parameterform in eine Darstellung überführen, in welcher der Parameter eliminiert ist; im gegebenen Fall wäre das die Bahnkurve ***y=f(x).***

Gehen wir nun also davon aus, dass die Bahnkurve eines Punktes in der Ebene mittels Parameterdarstellung beschrieben wird.
Für den zeitabhängigen Ortsvektor ergibt sich:

$$\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$$

nachdem die Zeit *Dt* verstrichen ist ergibt sich:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t)$$



Will man nun die Geschwindigkeit berechnen, gilt es gemäß Definition der Geschwindigkeit den Quotienten aus Ortsveränderung durch dafür notwendige Zeit zu berechnen. Im Grenzfall (für momentane Geschwindigkeiten) wird das der Differentialquotient mit unendlich kleinem *Dt* sein.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

In Komponentendarstellung schreibt man:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}; \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right)$$

Vollzieht man den Grenzübergang, bildet also den Differentialquotienten, so erhält man:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt} \right)$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt bewegt, setzt sich also aus den Geschwindigkeiten zusammen, mit denen sich die Koordinaten des Punktes ändern.

Liegt ein Vektor komponentenweise in Parameterdarstellung vor, so erhält man die Ableitung des Vektors nach diesem Parameter (Skalar) indem man den Vektor komponentenweise nach dem Skalar ableitet.
Aus der Skizze ist ersichtlich, dass der Vektor $d\vec{r}$ (dort als endlich Größe $\Delta\vec{r}$ dargestellt) tangential zur Bahnkurve liegt.
Auch die Ableitung $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sollte diese Richtung haben. Sie wird als Vektor der Geschwindigkeit bezeichnet.

Beispiel 1: Schräger Wurf

Die Ortskurve war gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = \left(v_{0x}t; -\frac{g}{2}t^2\right)$.

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Differenzieren nach dem Parameter Zeit:

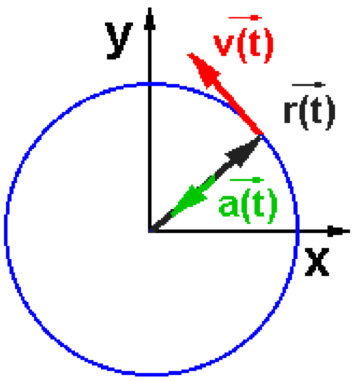
$$\vec{v} = (v_{0x}; -gt).$$

Die Größe „Beschleunigung „ erhält man durch Differenzieren der Geschwindigkeit:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (0; -g).$$

Die Beschleunigung beträgt g und ist nach unten gerichtet.

Beispiel 2: Kreisbewegung



Der Ortsvektor der Kreisbewegung ist gegeben durch:

$$\vec{r}(t) = (r\cos wt;\ r\sin wt).$$

Damit wird die Ableitung (Geschwindigkeit):

$$\vec{v}(t) = w\,(-r\sin wt; r\cos wt).$$

Die Geschwindigkeit steht damit senkrecht auf dem Ortsvektor.
(Überprüfe: Das Skalarprodukt wird =0)

Die Beschleunigung ergibt sich zu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = w^2(r\cos wt; r\sin wt) = -w^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Der Vektor der Beschleunigung hat die gleiche Richtung wie der Ortsvektor, aber den entgegengesetzten Richtungssinn (das trifft auf jede gleichförmige Kreisbewegung zu).
Die so ausgedrückte Beschleunigung trägt üblicherweise den Namen „Zentripedalbeschleunigung“.

Die Behandlung gleichgelagerter Probleme im 3-dimensionalen Raum erfolgt analog, jedoch unter Hinzunahme einer Beziehung, welche die Abhängigkeit der dritten Ortskoordinate vom gewählten Parameter (hier Zeit) ausdrückt.