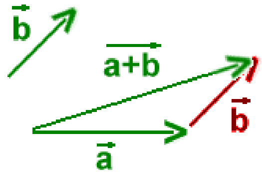
Vektoralgebra – Rechenregeln für Vektoren

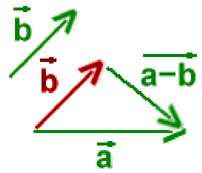
Addition und Subtraktion

geometrisch:

Vektoren werden geometrisch addiert, indem man die Vektoren mittels Parallelverschiebung aneinander fügt:
Bei der **Summation** werden die Pfeile „aufgereiht“.



Bei der **Subtraktion** werden Minuend- Vektor und Subtrahend- Vektor bis zu einem gemeinsamen Fußpunkt Parallel verschoben; der Abstand der Vektor-Pfeilspitzen (Pfeilbasis in der Spitze des Subtrahenden) repräsentiert die Vektor-Differenz.



Kommutativgesetz:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \pm\vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz:

$$\left[\vec{a} + \vec{b}\right] + \vec{c} = \left[\vec{a} + \vec{c}\right] + \vec{b} = \vec{a} + \left[\vec{b} + \vec{c}\right]$$

Komponentendarstellung:

Vektoren werden addiert oder subtrahiert, indem man die entsprechenden Komponenten der Vektoren addiert oder subtrahiert.

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}: \quad \begin{aligned} \left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right) &= \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \pm \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \\ &= \left\{\left(a_x \pm b_x\right)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\vec{k}\right\} \end{aligned}$$

oder kurz: $$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_x \pm b_x) \\ (a_y \pm b_y) \\ (a_z \pm b_z) \end{pmatrix}$$

bzw. $$\left(c_x; c_y; c_z\right) = \left\{\left(a_x \pm b_x\right); \left(a_y \pm b_y\right); \left(a_z \pm b_z\right)\right\}$$

Multiplikation von Vektoren

1. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar hat wesentlichen Einfluß auf den Betrag des Vektors;

- bei positiven Multiplikatoren >1wird der Vektor gestreckt,
- bei positiven Multiplikatoren <1 wird der Vektor gestaucht,
- negative Multiplikatoren ergeben einen antiparallelen Vektor (gestaucht oder gestreckt).

In Komponentenschreibweise ausgedrückt:

$$n \cdot (a_x; a_y; a_z) = (n \cdot a_x; n \cdot a_y; n \cdot a_z)$$

Dabei gilt das Distributivgesetz:

$$\vec{r} = n \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = n \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$$

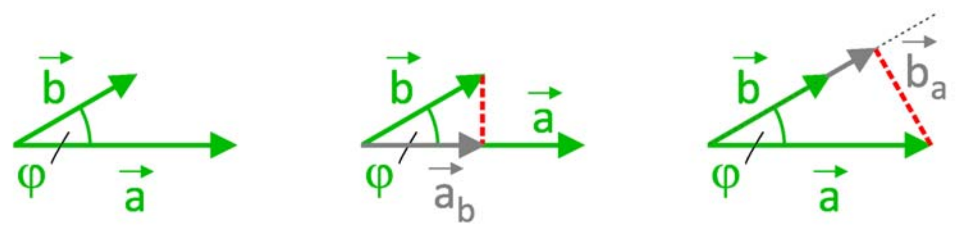
2. Multiplikation zweier Vektoren

In der Vektorrechnung werden 2 verschiedene Operationen definiert, die beide unter dem Oberbegriff „Multiplikation“ behandelt werden.
Das wird bedingt durch 2 verschiedene Ziele, die man mittels dieser Operationen erreichen will:

2.1. Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt)

Beim Skalarprodukt ist es Ziel, zwei Vektoren multiplikativ zu einem **Skalar** zu verknüpfen.

⇨ physikalische Aufgabenstellung: Berechnung der mechanischen Arbeit (skalare Größe) längs eines Weges (Vektor), unter Wirkung einer Kraft (Vektor).



Dabei müssen Kraft und Weg nicht zwingend auf einer Wirkungslinie liegen. Bekanntlich geht in die Berechnung der Arbeit nur die Kraft längs des Weges, also die entsprechende **Kraftkomponente** ein.

Projektionen: $|\vec{a}_b| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$

Es ist zu sehen, dass sich unabhängig davon, welchen Vektor man projiziert, stets das gleiche Resultat für die Berechnung des Produkts ergibt:

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Für das Skalarprodukt gilt das **Kommutativgesetz**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

das **Distributivgesetz**: $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Beachte:

- Bei $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \quad |\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$ muss $\cos\varphi = 0$ sein, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander!
- Bei $\vec{a} = \vec{b}$ ergibt sich $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2 = a^2$

⇨ Aus diesen beiden Punkten folgt für die Einheitsvektoren:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1; \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

⇨ Damit wiederum lässt sich das Skalarprodukt in Komponentenschreibweise berechnen.

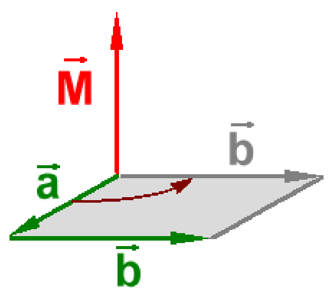
Die Behandlung erfolgt wie die Multiplikation zweier Polynome – gliedweise.
Wegen den oben genannten Bedingungen entfallen alle Glieder mit gemischten Produkten der Einheitsvektoren; alle quadratisch vorkommenden Einheitsvektoren werden 1. Somit ergibt sich:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

2.2. Multiplikation zweier Vektoren (Vektorprodukt, äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

Beim Vektorprodukt ist es Ziel, zwei Vektoren multiplikativ zu einem neuen **Vektor** zu verknüpfen.

⇨ physikalischen Aufgabenstellung: Berechnung des Drehmoments (Vektor) aus einer angreifenden Kraft (Vektor) und dem Abstand zur Drehachse (Vektor), genannt.



Im Bild bedeuten: $\vec{M}$ - Drehmonetenvektor
$\vec{a}$ - Abstand zur Drehachse
$\vec{b}$ - Kraft
grau (hinten) ist der Kraftvektor verschoben dargestellt.

⇨ Aus der physikalischen Problemstellung lassen sich verschiedene Anforderungen an die zu definierende Operation „Vektorprodukt“ formulieren:

- der resultierende Vektor muss senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren stehen.
- der Betrag des resultierenden Vektors muss gleich dem Produkt der Beträge der Ausgangsvektoren multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels sein.

- die Richtung des resultierenden Vektors muss dem Prinzip der „Rechtsschraube“ folgen (Drehung von $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg auf den in den Drehpunkt verschobenen Vektor $\vec{b}$)

Es ergibt sich für das Vektorprodukt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(a,b)}$$

- für das Vektorprodukt gilt das Distributivgesetz:
  $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

- das **Kommutativgesetz gilt nicht!** Stattdessen gilt:
  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Beachte:

- sind die Ausgangsvektoren parallel oder antiparallel, wird das Vektorprodukt gleich Null, weil der Sinus des eingeschlossenen Winkels Null wird.
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

  ⇨ damit ergibt sich für die Einheitsvektoren:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

⇨ damit wiederum lässt sich das Vektorprodukt in Komponentenschreibweise berechnen. Die Behandlung erfolgt wie die Multiplikation zweier Polynome – gliedweise. Es ergibt sich:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}}$$

Übersichtlicher kann das Vektorprodukt mittels einer Determinante dargestellt werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Mehrfachprodukte mit Vektoren

Der Versuch ein Mehrfachprodukt (zwei Multiplikationsoperationen in einem Ausdruck) zu bilden, bietet wegen der beiden zur Verfügung stehenden Möglichkeiten (Vektorprodukt und Skalarprodukt) mehrere Kombinationsmöglichkeiten. Bei genauerem Hinsehen bleiben aber nur zwei sinnvolle Ausdrücke übrig:

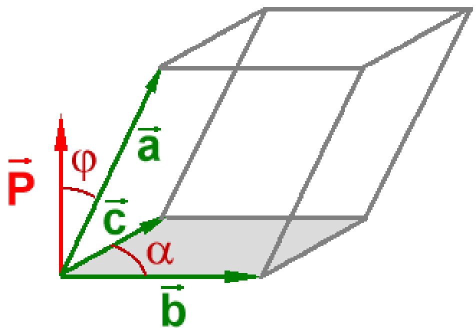
3.1. Das Spatprodukt

$$\boxed{V = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}$$

- das Spatprodukt ist ein **Skalarprodukt**, dessen absoluter Betrag gleich dem Volumeninhalt des Spates ist, der durch die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.

- das Spatprodukt ist positiv, wenn die Vektoren im Sinne einer Rechtsschraube aufeinander folgen (wie im Bild dargestellt).

- im Bild wird durch den Vektor $\vec{P}$ das Kreuzprodukt $\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ veranschaulicht. $\vec{P}$ steht dabei senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Fläche und hat einen Betrag, der dem Flächeninhalt (grau hinterlegte Fläche) entspricht.



- das Spatprodukt (Volumen des Spates) ergibt sich als Skalarprodukt $\left(\vec{a} \cdot \vec{P}\right)$ und widerspiegelt sich im Volumen des Spates - Produkt aus Grundfläche (Kreuzprodukt) mal Höhe (Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{P}$).

- das Spatprodukt ändert sich nicht bei **zyklischer** Vertauschung der Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

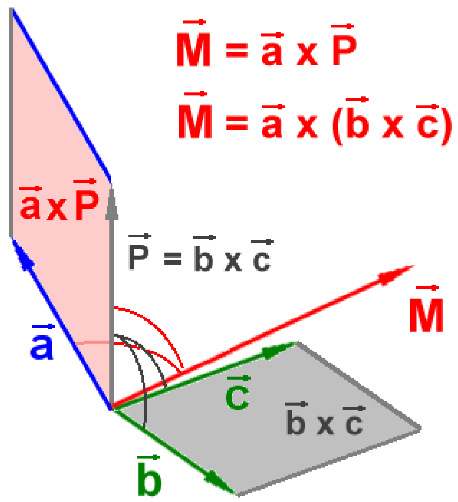
Übersichtlich kann das Spatprodukt mittels einer Determinante dargestellt werden:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

3.2. Der Entwicklungssatz der Vektorrechnung

Als letzte sinnvolle multiplikative Verknüpfung dreier beliebiger Vektoren des dreidimensionalen Raumes sei das „doppelte Vektorprodukt“ (auch „Entwicklungssatz der Vektorrechnung“) genannt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \times \vec{a}}$$



- das doppelte Kreuzprodukt lässt sich nach den bekannten Regeln für ein Vektorprodukt ausrechnen. Im Resultat ergibt sich:

$$\vec{M} = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

- interessant ist die Tatsache, dass der sich ergebende Vektor $\vec{M}$ in einer Ebene mit den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ befindet (koplanar).

Eine Anwendung des doppelten Kreuzproduktes findet man z.B. bei der Berechnung des Drehimpulses $\vec{L}$ einer Punktmasse oder auch eines kompakten Körpers.

- im Falle einer **Punktmasse** lässt sich ein Zusammenhang zwischen einem translatorisch angegebenen Impuls und dem Drehimpuls herstellen:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

⇨ gibt man den translatorischen Impuls in der üblichen Form an und drückt $\vec{v}$ mittels der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ aus:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \qquad ; \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

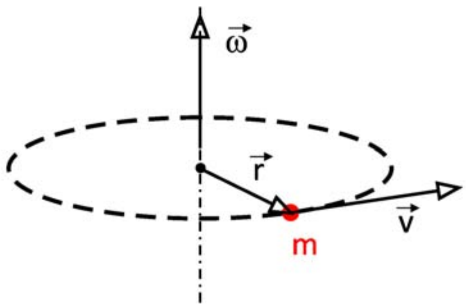
ergibt sich:

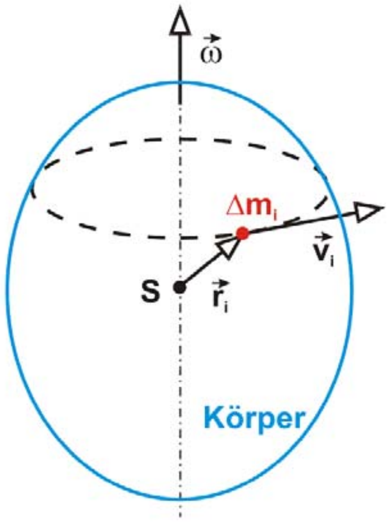
$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \cdot (\vec{r}^{\,2} \cdot \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}))$$

⇨ im Falle der kreisenden Punktmasse stellt sich die Problematik sehr einfach dar:

- $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ stehen senkrecht aufeinander
- der zweite Teil des Klammerausdrucks $\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = 0$
- das Quadrat $\vec{r}^{\,2}$ ist ein Skalar;

⇨ der Vektor $\vec{L}$ zeigt also in die Richtung von $\vec{\omega}$ und hat den Betrag $|L| = m \cdot r^2 \cdot \omega$.





Komplizierter gestaltet sich die weitere Betrachtung im Falle **kompakter Körper**. Hier muss über alle Punktmassen integriert werden; der Drehimpuls berechnet sich:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \Delta\vec{P}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \Delta\vec{v}_i \cdot \Delta m_i$$

Im Grenzfall für unendlich kleiner Masseelemente ergibt sich:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int \{\vec{r}^2 \cdot \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\} dm$$

Möchte man diesen Ausdruck in eine Form $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ bringen,
muss man im Ausdruck unter dem Integral $\vec{\omega}$ ausklammern.
Das ist nicht trivial, da der Vektor $\vec{\omega}$ im 2. Teil des Ausdrucks in einem Skalarprodukt verarbeitet ist.
Der dort entstehende Vektor $\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$ zeigt in Richtung von $\vec{r}$!

Um den Erfordernissen gerecht zu werden, wird mit einem Stern als Zeichen ein 3. Typ der Multiplikation zweier Vektoren eingeführt: das **dyadische Produkt** $\vec{r} * \vec{r}$.

Die Komponenten *x, y* und *z* des Ortsvektors $\vec{r}$ müssen so multipliziert werden, dass

$$\vec{r} * \vec{r} \cdot \vec{\omega} = \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$$

War das Resultat beim Skalarprodukt ein Skalar und beim Vektorprodukt ein Vektor, so ergibt sich beim dyadischen Produkt im Ergebnis ein **Tensor**.
Dieser Tensor ist nichts anderes als die geordnete Darstellung aller denkbaren Produkte zwischen den Komponenten der beteiligten Vektoren - davon gibt es genau 3 x 3 = 9 Stück. Die geordnete Darstellung in Form einer Matrix mit $\vec{r} = (x, y, z)$ als Ortsvektor sieht dann folgendermaßen aus:

$$\vec{r} * \vec{r} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen, ob das Produkt unseren Forderungen genügt:
Es war bei der Einführung gefordert worden: $(\vec{r} * \vec{r}) \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega})$

Wir setzen die Vektoren in die linke Seite ein:

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \\ y \cdot (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \\ z \cdot (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) = \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega})$$

Damit lässt sich der Drehimpuls für einen kompakten ausgedehnten Körper in der gewohnten Form, als Produkt von Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit schreiben, wobei das Trägheitsmoment jetzt der Tensor $\underline{\underline{J}}$ (kenntlich durch zweifache Unterstreichung, auf die aber häufig verzichtet wird) ist.
Im allgemeinen Fall werden dabei allerdings $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ nicht mehr parallel sein.