Matrizen / Tensoren - Teil 3

Tensoren - zweidimensionales Beispiel

- um das Eigenwertproblem zu verdeutlichen
  ⇨ hier als Beispiel ein zweidimensionales Problem
  ⇨ die entsprechenden Matrizen und Determinanten haben so nur 2 x 2 Elemente;
  sie lassen sich übersichtlicher behandeln und auch in einer Skizze veranschaulichen.

- Analog unserer Problemstellung zum Trägheitstensor legen wir eine symmetrische Matrix A, allerdings mit 2 x 2 Elementen zugrunde (der Begriff Tensor wird hier nicht benutzt, da ein Tensor 2. Stufe definitionsgemäß 9 Elemente hat).

- Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

  ⇨ diese soll in die Diagonalform überführt werden
  ⇨ gesucht ist also eine Koordinatentransformation:
  $(x, y) \rightarrow (x', y')$, für welche die Matrix in die Diagonalform übergeht:

$$A^{(d)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

- in unseren bisherigen Betrachtungen stand als Beispiel der 3 x 3 Trägheitstensor zur Verfügung; was kann man sich aber hier unter der angegebenen 2 x 2 Matrix A vorstellen?

  ⇨ wir multiplizieren A von rechts und von links mit dem Ortsvektor $\vec{r} = (x, y)$

$$\vec{r} \cdot A \cdot \vec{r} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y \\ \frac{-\sqrt{3}}{4}x + \frac{11}{4}y \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{9}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}xy + \frac{11}{4}y^2 = \frac{1}{4}(9x^2 - 2\sqrt{3}xy + 11y^2)$$

  ⇨ Kenner der Kegelschnitte werden hier eine Ellipse erkennen,
  deren Hauptachsen aber nicht mit der Richtung der Koordinatenachsen zusammenfallen.

  ➡ **Wir suchen also das Koordinatensystem (x', y'),**
  dessen Achsen mit den Ellipsenachsen zusammenfallen.

- die Eigenwerte der Matrix A ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0$$

also

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{4}-\lambda & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{9}{4}-\lambda\right)\cdot\left(\frac{11}{4}-\lambda\right)-\frac{3}{16}=0$$

⇨ ausmultipliziert ergibt das: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

⇨ mit den Lösungen: $\lambda_1=A_1=2$ und $\lambda_2=A_2=3$

⇨ damit haben wir die Eigenwerte und die Eigenwertmatrix (diagonalisierte Matrix):

$$A^{(d)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⇨ diese diagonalisierte Form der Matrix bezieht sich auf das Koordinatensystem (x',y').

- die entsprechende Ellipse erhält man erneut durch Multiplikation mit dem Ortsvektor des neuen Koordinatensystems von links und von rechts:

$$(x',y')\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=(x',y')\cdot\begin{pmatrix} 2x' \\ 3y' \end{pmatrix}=2x'^2+3y'^2$$

setzt man diesen Ausdruck gleich einer Konstanten (z.B. =1) erhält man die grafische Veranschaulichung:

$$2x'^2+3y'^2=\frac{x'^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\frac{y'^2}{(1/\sqrt{3})^2}=const.=1$$

➡ das ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a=1/\sqrt{2}$ und $b=1/\sqrt{3}$.

Mit der Diagonalisierung der Matrix ist die gewünschte Drehung des Koordinatensystems in die Richtung der Ellipsen-Hauptachsen offensichtlich erfolgreich gewesen.

- wir ermitteln nun noch die **Eigenvektoren:**

$$\vec{a}_1=(x_1,y_1) \quad \text{und} \quad \vec{a}_2=(x_2,y_2)$$

⇨ sie ergeben sich aus

$$A\cdot\vec{a}_1=\lambda_1\cdot\vec{a}_1\ ;\quad (A-\lambda_1\cdot E)\cdot\vec{a}_1=0$$

und $$A\cdot\vec{a}_2=\lambda_2\cdot\vec{a}_2\ ;\quad (A-\lambda_2\cdot E)\cdot\vec{a}_2=0$$

➡ für den ersten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=2$ gilt damit:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-2 & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4}-2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=0$$

⇨ ausmultipliziert ergibt sich das Gleichungssystem

$$\frac{1}{4}\cdot(x_1-\sqrt{3}y_1)=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{4}\cdot(-\sqrt{3}x_1+3y_1)=0$$

⇨ offensichtlich sind die beiden Gleichungen linear abhängig

⇨ dadurch ist das Gleichungssystem unterbestimmt; die Lösungen können nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden; setzt man z.B. $y_1=1$ ergibt sich $x_1=\sqrt{3}$

⇨ da es hier um eine Drehung des Koordinatensystems gehen soll
- ohne Streckung / Stauchung der Achsen - gilt die Normierungsbedingung $x_1^2+y_1^2=1$

⇨ damit werden Einheitsvektoren in den ausgezeichneten Richtungen beschreiben.

- der erste Eigenvektor ergibt sich zu:

$$\vec{a}_1=(x_1,y_1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

- in gleicher Weise ergibt sich für den zweiten Eigenwert $\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-3 & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4}-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

und damit der zweite Eigenvektor

$$\vec{a}_2=(x_2,y_2)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- die Transformationsmatrix, welche die Matrix A in die Diagonalgestalt $A^{(d)}$ überführt, wird aus den Eigenvektoren gebildet und kann geschrieben werden:

$$T=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

⇨ die Richtigkeit lässt sich leicht überprüfen:
Für orthogonale Matrizen ist die Kehrmatrix T^{-1} gleich der transponierten Matrix $T^{(T)}$.
Man erhält sie durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten der Matrix.
Setzt man also für $T^{-1}\cdot A\cdot T=A^{(d)}$ die entsprechend konkreten Werte ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Durch die Transformation T wurde das Bezugssystem (x, y) in das System (x', y') überführt. Die Matrix erscheint im Koordinatensystem (x', y') in Diagonalform.

- betrachten wir die Komponenten der Transformationsmatrix genauer:
  ⇨ die Werte entsprechen genau $\sin 30°$ bzw. $\cos 30°$
  ⇨ da wir über eine Drehung sprechen, handelt es sich in unserem speziellen Fall offenbar um eine Drehung um den Winkel den Winkel $\alpha = 30°$

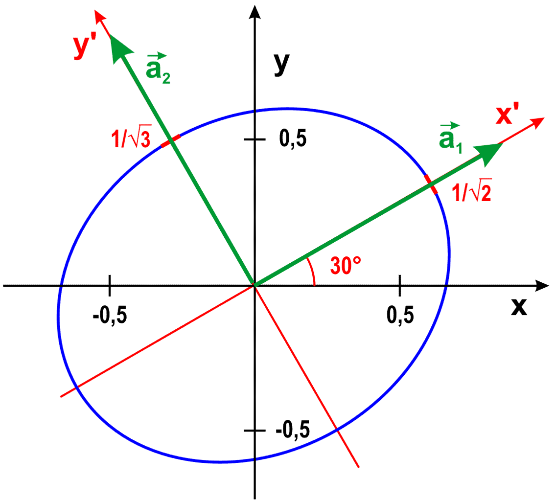
$$T = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$$

➡ für beliebige Winkel wird solch eine Drehung durch die orthogonale Matrix dargestellt:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geometrische Darstellung der Rechnung:
Die Matrix A stellt - von rechts und links mit dem Ortsvektor multipliziert - eine Ellipse dar.

Die Eigenwertaufgabe bestand darin, die Größe ihrer Halbachsen und die Lage des Hauptachsensystems (x', y') in Bezug auf das vorgegebene Koordinatensystem (x, y) zu finden.



Tensoren - dreidimensionales Beispiel

- Versuchen wir nun ein dreidimensionales Beispiel.
  Typisch ist hier unser bereits mehrfach bemühter Trägheitstensor J.

$$J = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Die zu stellenden Fragen lauten:
  - Wie groß sind die Hauptträgheitsmomente,
  - wie sind die Hauptträgheitsachsen bezüglich des Koordinatensystems (x, y, z) orientiert, ... ?

- dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte: $\det(J-\lambda\cdot E)=0$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  ⇨ daraus ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda)-4(7-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

  ⇨ ohne die Rechnung hier auszuführen, sei das Ergebnis vorgestellt;
  die Gleichung 3. Grades ergibt 3 Lösungen:

$$\lambda_1=9, \quad \lambda_2=6, \quad \lambda_3=3$$

Eine symmetrische Matrix (wie unser Trägheitstensor) besitzt 3 angenehme Eigenschaften:
- Sämtliche Eigenwerte sind reell und mit ihnen auch sämtliche Eigenvektoren.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- Zu jedem Eigenwert gehören so viele unabhängige Eigenvektoren, wie seine Ordnung beträgt.

Daraus folgt: Es gibt insgesamt n linear unabhängige Eigenvektoren - auch dann, wenn mehrfache Eigenwerte auftreten.

  ➡ damit haben wir die Eigenwerte und die Eigenwertmatrix (diagonalisierte Matrix):

$$J^{(d)} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

  diese diagonalisierte Matrix bezieht sich auf das Koordinatensystem (x', y', z').

➡ die Diagonalenelemente entsprechen den 3 Hauptträgheitsmomenten J_x, J_y, J_z
in Richtung der Hauptträgheitsachsen (freie Achsen).

- Wie kann man sich diesen diagonalisierten Trägheitstensor vorstellen?

  ⇨ wie bereits im zweidimensionalen Beispiel multiplizieren wir diese Matrix
  von links und rechts mit dem Ortsvektor des Koordinatensystems (x', y', z')

$$(x', y', z')\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x', y', z')\cdot\begin{pmatrix} 9x' \\ 6y' \\ 3z' \end{pmatrix} = 9x'^2+6y'^2+3z'^2$$

  ⇨ setzt man diesen Ausdruck gleich einer Konstanten (z.B. =1)
  erhält man die grafische Veranschaulichung:

$$9x'^2+6y'^2+3z'^2 = \frac{x'^2}{(1/3)^2}+\frac{y'^2}{(1/\sqrt{6})^2}+\frac{z'^2}{(1/\sqrt{3})^2} = const. = 1$$

  ⇨ wir erhalten ein dreiachsiges Ellipsoid mit den entsprechenden Halbachsen.

Mit der Diagonalisierung der Matrix ist die gewünschte Drehung des Koordinatensystems in die Richtung der Ellipsoid-Hauptachsen offensichtlich erfolgreich gewesen.

- Wir ermitteln nun noch die **Eigenvektoren:**

  $$\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)\ ,\ \vec{a}_2=(x_2,y_2,z_3)\ \text{ und }\ \vec{a}_3=(x_3,y_3,z_3)$$

  ⇨ sie ergeben sich aus

  $$J\cdot\vec{a}_1=\lambda_1\cdot\vec{a}_1\ ;\ \ (J-\lambda_1\cdot E)\cdot\vec{a}_1=0\ ,$$
  $$J\cdot\vec{a}_2=\lambda_2\cdot\vec{a}_2\ ;\ \ (J-\lambda_2\cdot E)\cdot\vec{a}_2=0$$

  und $$J\cdot\vec{a}_3=\lambda_1\cdot\vec{a}_3\ ;\ \ (J-\lambda_3\cdot E)\cdot\vec{a}_3=0$$

- für den **ersten Eigenvektor** zum Eigenwert $\lambda_1=9$ gilt damit:

  $$J=\begin{pmatrix}7-9 & -2 & 0\\ -2 & 6-9 & -2\\ 0 & -2 & 5-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=0$$

  ⇨ das Gleichungssystem

  $$(-2x_1-2y_1-0z_1)=0,\ \ (-2x_1-3y_1-2z_1)=0\ \text{ und }\ (0x_1-2y_1-4z_1)=0$$

  ⇨ offensichtlich sind die Gleichungen linear abhängig (merkt man, wenn man zu rechnen beginnt).

  ⇨ das Gleichungssystem ist also unterbestimmt; die Lösungen können nur bis auf einen konstanten Faktor ermittelt werden

  ⇨ setzt man z.B. $z_1=1$ ergibt sich $x_1=2,\ y_1=-2$

- Da es hier wie im zweidimensionalen Beispiel um eine Drehung des Koordinatensystems geht - ohne Streckung / Stauchung der Achsen - gilt die Normierungsbedingung $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$

  ⇨ im konkreten Fall ergibt sich daraus $x_1=\frac{2}{3},\ y_1=-\frac{2}{3}$ und $z_1=\frac{1}{3}$

  also $$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}0{,}667\\ -0{,}667\\ 0{,}333\end{pmatrix}$$

  ⇨ analog ergeben sich zwanglos $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-0{,}667\\ -0{,}333\\ 0{,}667\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0{,}333\\ 0{,}667\\ 0{,}667\end{pmatrix}$.

Achtung: Stellt man sich vor, dass die Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ die Richtungen für (x',y',z') vorgeben, lohnt eine Prüfung, ob aus dem **Rechtssystem** (x,y,z) wieder ein Rechtssystem geworden ist.
So wie im Rechtssystem (x,y,z) das Kreuzprodukt aus den Einheitsvektoren $\vec{x}_0$ und $\vec{y}_0$ den Vektor $\vec{z}_0$ ergibt $\vec{x}_0\times\vec{y}_0=\vec{z}_0$, sollte gelten $\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\vec{a}_3$.

- wir prüfen: $$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0{,}667 & -0{,}667 & 0{,}333\\ -0{,}667 & -0{,}333 & 0{,}667\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}333\\ -0{,}667\\ -0{,}667\end{pmatrix}=-\vec{a}_3$$

- das ist genau der $\vec{a}_3$ entgegengesetzte Vektor.

  Das Problem entsteht, weil sich die Eigenvektoren nur bis auf einen konstanten Faktor genau bestimmen lassen. Dieser konstante Faktor kann natürlich auch negativ sein.

Schlussfolgerung: Um als Koordinatensystem ein Rechtssystem zu erhalten sollte eine gründliche Prüfung der Eigenvektoren und ihrer Zuordnung erfolgen! Ansonsten könnten bei der Lösung entsprechender physikalischer Probleme Überraschungen auftreten!

- Für unseren konkreten Fall schlage ich einen anderen Ausweg vor:
  Wir ändern die Zuordnung der Eigenvektoren!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}667 \\ -0{,}667 \\ 0{,}333 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}667 \\ 0{,}667 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -0{,}667 \\ -0{,}333 \\ 0{,}667 \end{pmatrix}$$

  ⇨ eine Prüfung zeigt, dass so ein Rechtssystem aus den 3 Eigenvektoren erstellt wurde.

- Die Transformationsmatrix, welche die Matrix J in die Diagonalgestalt $J^{(d)}$ überführt wird aus den Eigenvektoren gebildet und kann geschrieben werden:

$$T = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0{,}333 & -0{,}667 \\ -0{,}667 & 0{,}667 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}667 & 0{,}667 \end{pmatrix}$$

- Die Richtigkeit lässt sich leicht überprüfen:
  Für orthogonale Matrizen ist die Kehrmatrix T^{-1} gleich der transponierten Matrix $T^{(T)}$.
  Man erhält sie durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten der Matrix.

  ⇨ Setzt man also für $T^{-1} \cdot J \cdot T = J^{(d)}$ die entsprechend konkreten Werte ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0{,}667 & -0{,}667 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}667 & 0{,}667 \\ -0{,}667 & -0{,}333 & 0{,}667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0{,}333 & -0{,}667 \\ -0{,}667 & 0{,}667 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}667 & 0{,}667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Durch die Transformation T wurde das Bezugssystem (x, y, z) in das System (x', y', z') überführt. Die Matrix erscheint im Koordinatensystem (x', y', z') in Diagonalform.

- Nicht ganz so einfach, wie im zweidimensionalen Fall ist die Veranschaulichung der Transformationsmatrix.
  ⇨ dazu sei auf Kapitel „Matrizen und Determinanten - ein erster Hinweis“ ,
  Kapitel „Drehmatrix im R^3“ verwiesen.