Reihenentwicklung – die Taylorentwicklung

Motivation:

Es liege eine Potenzreihe folgender Form vor:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

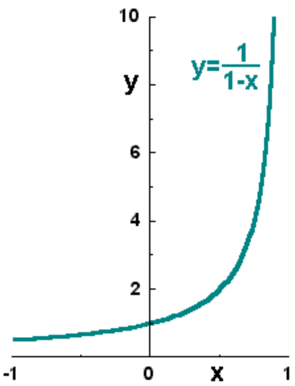
Durch Umformen ergibt sich:

$$x \cdot s_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1}$$

$$-s_n = -1 - x - x^2 - \ldots - x^n$$

$$xs_n - s_n = -1 + x^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$



Für unendlich große n ergibt sich im Wertebereich $-1 < x < 1$

eine endliche Summe $s_n = \dfrac{1}{1-x}$.

Diese lässt sich als Funktion von x darstellen.

Somit lässt sich eine unendliche Reihe als einfacher analytischer Ausdruck darstellen.

Fragen, die der Mathematiker stellt:

- Gelingt das auch bei anderen Funktionen?
- Gibt es öfter so einfache Zuordnungen einer unendlichen Reihe zu einem analytischen Ausdruck?

Frage, die der Physiker stellt:

- Ist umgekehrt die Entwicklung einer Funktion als Reihe (Potenzreihe) möglich?
  Die Antwort lautet „ja“ - eine solche Potenzreihe wird als **Taylorreihe** bezeichnet.

Worin liegt der Nutzen der Darstellung einer Funktion als Taylorreihe?

- Numerische Berechnung von Funktionswerten mit beliebiger geforderter Genauigkeit.
- Verwendung der ersten (der vom Wert her dominanten) Glieder als Näherung.
- Gliedweise Integration, sollte die Funktion nicht geschlossen integrierbar sein.

Beachtet werden muss allerdings, dass die Entwicklung der Taylorreihe immer in der Nähe eines ausgewählten Punktes geschieht - je näher man mit seinen Betrachtungen am gewählten Punkt bleibt, um so genauer ist das Ergebnis.

Hier gibt es erneut einen Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Fragestellung.

- Mathematik: Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3$ nach Potenzen von $(x+1)$.

- Physik: Wie lässt sich $f(x) = x^3$ in der Nähe des Punktes $x = -1$ darstellen?

(Lösung: $f(x) = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$)

Behauptung:
Wir nehmen an, die Funktion $f(x)$ lässt sich als Potenzreihe in folgender Form darstellen:

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

Dann sollte unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist, die Bestimmung der Koeffizienten a_n möglich sein.
Sind die Funktion $f(x)$ und die Potenzreihe tatsächlich identisch, sollten z.B. an der Stelle $x = 0$ die Funktion $f(x)$ und alle ihre Ableitungen mit der Reihe und allen ihren Ableitungen übereinstimmen.

Damit ergibt sich für die Stelle $x = 0$:

$$f(0) = a_0 \qquad f'(0) = 1 \cdot a_1 \qquad f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

Die Entwicklung einer Funktion als Taylorreihe lautet:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Es gibt Funktionen, bei denen die Taylorreihe nur für einen bestimmten Bereich von x-Werten konvergiert (siehe Beispiel oben: $f(x) = 1/(1-x)$).

Der Bereich, in dem sich eine Funktion als Potenzreihe entwickeln lässt, heißt Gültigkeitsbereich oder Konvergenzbereich.

Verallgemeinerung:
Bisher wurde die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ entwickelt.
Ist eine Entwicklung an einer beliebigen Stelle $x = x_0 \neq 0$ möglich ?

Ansatz: $$f(x) = \bar{f}(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

Die Koeffizienten a werden durch differenzieren der Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ bestimmt:

$$f(x_0) = a_0 \qquad f'(x_0) = 1 \cdot a_1 \qquad f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 \quad \ldots \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$$

Damit lässt sich die Reihenentwicklung an der Stelle $x = x_0$ aufschreiben:

Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Die Differenz $h = (x - x_0)$ im Ansatz lässt sich auch als neue Veränderliche auffassen:

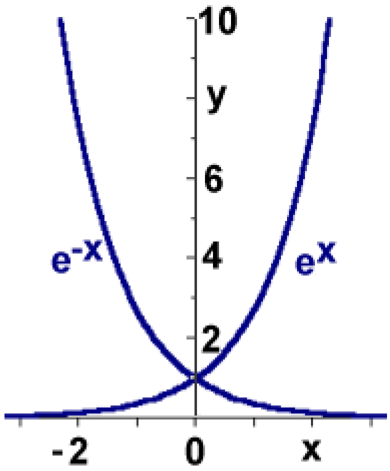
$$f(x) = \bar{f}(h) = \bar{f}(0) + \frac{\bar{f}'(0)}{1!}h + \frac{\bar{f}''(0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{\bar{f}^{(n)}(0)}{n!}h^n + \ldots$$

Die Entwicklung der Funktion $\bar{f}(h)$ an der Stelle $h = 0$ ist dann gleichbedeutend mit der Entwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Taylorentwicklung häufig gebrauchter Funktionen

1. Exponentialfunktionen

(Bolzmannverteilung, barometrische Höhenformel, Dämpfungserscheinungen, radioaktiver Zerfall, Lade- und Entladevorgänge)



Funktion: $f(x) = e^x$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$$

Damit ergibt sich als Entwicklung:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Funktion: $f(x) = e^{-x}$

$$f(0) = 1; \qquad f'(0) = (-1)^1; \qquad f''(0) = (-1)^2; \qquad f'''(0) = (-1)^3; \; \ldots \; f^{(n)}(0) = (-1)^n$$

Damit ergibt sich als Entwicklung:

$$f(x) = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\boxed{e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}}$$

Aus den Reihenentwicklungen ist ersichtlich:

für $x << 1 \Rightarrow$ $\boxed{e^{\pm x} \approx 1 \pm x}$

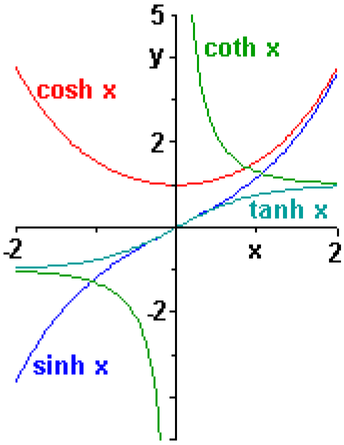
Analog zur Exponentialfunktion mit der Basis e lässt sich die Funktion $f(x) = a^x$ entwickeln, wobei die Basis a eine beliebige reelle Zahl ist.

Für die n-te Ableitung gilt: $f^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$ und damit für die Reihenentwicklung:

$$f(x) = a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \ldots$$

$$\boxed{a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n}$$

2. Hyperbolische Funktionen



Funktion: *y = cosh x*

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x + e^{-x} =$$

$$= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) + (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots) =$$

$$= 2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}}$$

Für x-Werte $|x| << 1$ gilt somit als Näherung:

$$\boxed{\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}}$$

Funktion: *f(x) = sinh x*

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x - e^{-x} =$$

$$= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) - (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots) =$$

$$= 2(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots)$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}}$$

Für x-Werte $|x| << 1$ gilt somit als Näherung:

$$\boxed{\sinh x \approx x}$$

Analog zu $\cosh x$ und $\sinh x$ lassen sich auch $\tanh x$ und $\coth x$ entwickeln.

3. Trigonometrische Funktionen

Funktion: *f(x) = sin x*

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x$$

Bei einer Entwicklung an der Stelle x = 0 verschwinden alle geraden Ableitungen.

Zusammenfassend gilt:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Aus dieser Entwicklung folgt als Näherung für kleine $x \quad (|x| << 1)$

$$\boxed{\sin x \approx x}$$

Funktion: *f(x) = cos x*

Da die cos-Funktion als erste Ableitung der sin-Funktion, läßt sie sich recht einfach gewinnen:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

Für kleine x -Werte folgt:

$$\boxed{\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}}$$

sin- und cos- Funktion und ihr Zusammenhang mit den Exponentialfunktionen

Als Reihe zu entwickeln sei die Funktion: $f(x) = \cos x + i \cdot \sin x$

Unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklungen für $\sin x$ und $\cos x$ ergibt sich:

$$\cos x + i \cdot \sin x = \left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right\} + \left\{ix - i\frac{x^3}{3!} + \ldots\right\}$$

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots$$

Diese Reihenentwicklung ist aber identisch mit der Reihenentwicklung $f(x) = e^{ix}$

Entsprechend kann gezeigt werden, dass $\cos x - i \cdot \sin x = e^{-ix}$

$$\boxed{\cos x \pm i \cdot \sin x = e^{\pm ix}}$$ (Moivresche Formel)

Ähnlich lassen sich $\tan x$ und $\cot x$ entwickeln und Additionstheoreme beweisen.

4. Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion wird z.B. zur Beschreibung der Dämpfung benutzt.

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln x - \ln x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}$$

Da die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, werden zur Entwicklung als Reihe in der Nähe von $x = 0$ ein paar Tricks benutzt:

a) $y = f(z) = \ln(1+z)$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = -1 \quad f'''(0) = -2 = -1 \cdot 2 \quad f^{(4)}(0) = -6 = -1 \cdot 2 \cdot 3$$

Daraus folgt die Reihenentwicklung:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{z^n}{n} \qquad (-1 < z \le 1)$$

b) $y = f(z) = \ln(1-z)$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = -1 \quad f''(0) = -1 \quad f'''(0) = -2 = -1 \cdot 2 \quad f^{(4)}(0) = -6 = -1 \cdot 2 \cdot 3$$

Daraus folgt die Reihenentwicklung:

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{n}$$

Daraus ergibt sich die folgende Reihenentwicklung:

$$f(z) = \ln\frac{(1+z)}{(1-z)} = \ln(1+z) - \ln(1-z) = 2(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots)$$

und mit $x = \frac{1+z}{1-z}$ für das Argument des Logarithmus ergibt sich $z = \frac{x-1}{x+1}$.

Durch Einsetzen erhält man:

$$\boxed{\ln x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right\} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(2n-1)}}$$

Für kleine x-Werte ergibt sich als Näherung:

$$\boxed{y \approx 1 + x}$$