

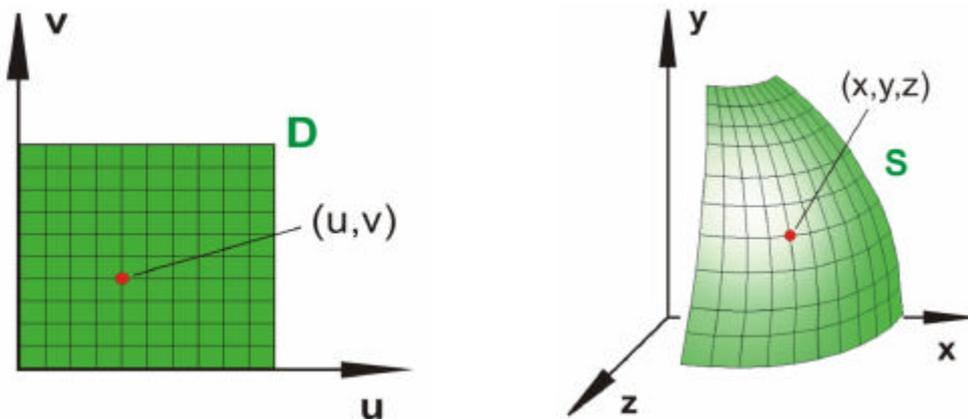
## Oberflächenintegral

Günstige Voraussetzung für eine erfolgreiche Berechnung des Oberflächenintegrals ist eine **Parameterdarstellung** der Fläche.

### Parameterdarstellung einer Fläche

Vorstellung:

Ein ebenes Flächenstück  $D$  wird stetig zu einem Flächenstück  $S$  im Raum verformt.

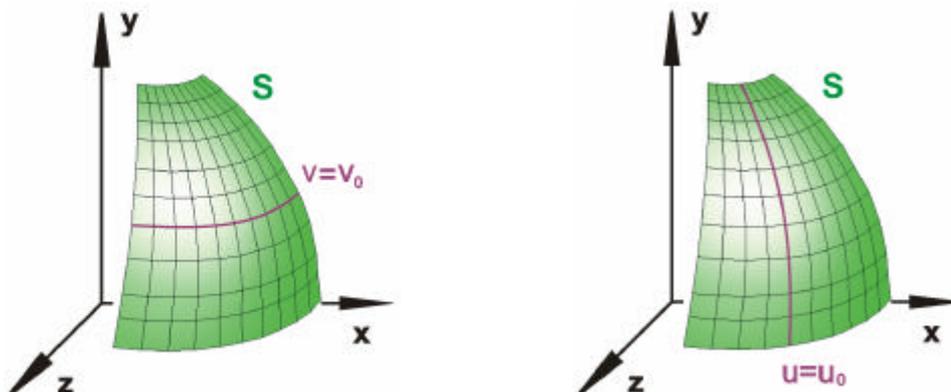


Dabei geht der Punkt  $(u,v) \hat{I} D$  über in den Flächenpunkt  $(x(u,v); y(u,v); z(u,v)) \hat{I} S$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ . Das heißt, der Punkt auf der Fläche besitzt räumliche Koordinaten  $(x,y,z)$ , wird aber über die Parameter  $(u,v)$  gewissermaßen „adressiert“.

Die Abbildung  $(u,v) \rightarrow \vec{r}(u,v)$  mit den Komponenten  $x = x(u,v)$ ,  $y = y(u,v)$ ,  $z = z(u,v)$  heißt Parameterdarstellung von  $S$ .

Die beiden unabhängigen Veränderlichen  $u$  und  $v$  heißen Parameter, Parameterbereich ist  $D$ .

Hält man in der Parameterdarstellung des Ortsvektors  $\vec{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$  einen der Parameter konstant, werden die Parameterlinien  $u = u_0$  und  $v = v_0$  auf der Oberfläche dargestellt.

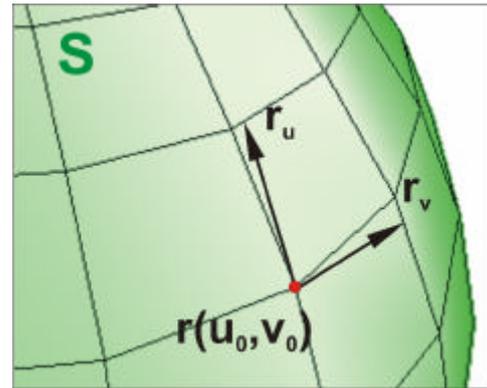


Nun lassen sich entlang der Parameterlinien die Tangentenvektoren durch Differenzieren (partielle Ableitungen) bestimmen.

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u_0, v_0)$$

$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u_0, v_0)$$

sind damit die Tangentenvektoren an die Parameterlinien  $u = u_0$  und  $v = v_0$  im Punkt  $\vec{r}(u_0, v_0)$ .



Beide Vektoren spannen eine Tangentialebene an S im Punkt  $\vec{r}(u_0, v_0)$  auf - vorausgesetzt, sie sind linear unabhängig.

Das Kreuzprodukt  $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$  steht senkrecht auf beiden Tangentenvektoren, also senkrecht auf der Tangentialebene. Der entsprechende Einheitsvektor  $\vec{n}(u_0, v_0)$  in dieser Richtung heißt Flächennormale im Punkt.

## Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche

Den Inhalt einer gekrümmten Fläche wird in 3 Schritten berechnet:

- Zerlegung der Fläche in Elemente,
- Approximation der Elemente durch (kleine) Parallelegramme,
- Summation und Grenzübergang.

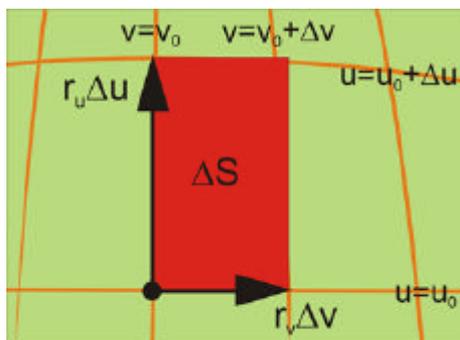
Hierzu wird die eben dargestellte Parameterdarstellung der Fläche benötigt.

### 1. Schritt: Zerlegung in Elemente

Die durch  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  gegebene Fläche wird, wie oben zu sehen, durch die Parameterlinien in Flächenelemente zerlegt.

### 2. Schritt: Approximation

Das von den vier Parameterlinien  $u = u_0$ ,  $u = u_0 + \Delta u$ ,  $v = v_0$ ,  $v = v_0 + \Delta v$  eingeschlossene Flächenelement wird durch ein Parallelogramm  $\Delta S$  in der Tangentialebene genähert. Das Parallelogramm wird durch die Vektoren  $\vec{r}_u \Delta u$  und  $\vec{r}_v \Delta v$  gebildet.



Der Flächeninhalt des Parallelogramms erhält man aus dem Kreuzprodukt:

$$\Delta S = |\vec{r}_u \Delta u \times \vec{r}_v \Delta v| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

### 3. Schritt: **Summenbildung und Grenzübergang**

Wird die Fläche in die Elemente  $\Delta S_i$  zerlegt, ergibt sich als Approximation für den Flächeninhalt

$$S \cong \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}_u(u_i, v_i) \times \vec{r}_v(u_i, v_i)| \Delta u \Delta v .$$

Bei ständiger Verfeinerung der Flächenelemente erhält man den genauen Wert des Flächeninhalts:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\vec{r}_u(u_i, v_i) \times \vec{r}_v(u_i, v_i)| \Delta u \Delta v .$$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt der gekrümmten Oberfläche zu

$$S = \iint_D |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

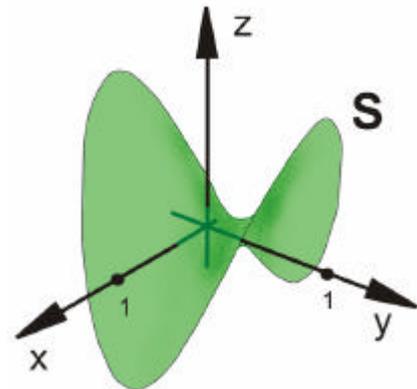
#### Beispiel:

Zu bestimmen ist die Oberfläche eines hyperbolischen Paraboloids  $z = y^2 - x^2$ , der von einem Zylinder  $x^2 + y^2 = 1$  ausgeschnitten wird.

Wie oben angegeben überführt man die Darstellung in die günstig zu bearbeitende Parameterform:

Mit  $2u = y + x$  und  $2v = y - x$  ergibt sich

$$\vec{r}(u, v) = [u - v, u + v, 4uv] \quad \text{mit} \quad u^2 + v^2 \leq \frac{1}{2}$$



Unter Verwendung der oben abgeleiteten Formel für die Oberfläche:

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv \quad \text{mit dem Parameterbereich } D \text{ ergeben sich}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = [1, 1, 4v]; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = [-1, 1, 4u]; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = [4u - 4v, -4u - 4v, 2]$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = 2\sqrt{8(u^2 + v^2) + 1}$$

Für die gesuchte Oberfläche ergibt sich

$$S = \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}} 2\sqrt{8(u^2 + v^2) + 1} \cdot du dv$$

Ein Übergang zu Polarkoordinaten erweist sich als sinnvoll.

$$u = r \cdot \cos j ; \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$v = r \cdot \sin j ; \quad 0 \leq j \leq 2p$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \int_0^{2p} 2\sqrt{8r^2 + 1} \cdot r dr dj$$

$$= 4p \left[ \frac{1}{24} (8r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{p}{6} (\sqrt{125} - 1) \approx 5,33$$

### Oberflächenintegral einer skalaren Funktion

Neben der Berechnung des Flächeninhalts teils recht kompliziert geformter Oberflächen lässt sich der Formalismus des Oberflächenintegrals auch zur Lösung anderer Aufgabenstellungen nutzen.

Beispiele dafür:

- Masse einer gekrümmten Folie mit inhomogener Dichte,
- Oberflächenladung eines Körpers
- Moment und Schwerpunkt eines gewölbten Blechs
- Flüssigkeitsstrom oder Wärmestrom durch gekrümmte Oberflächen.

Dazu wird auf der Oberfläche eine Belegungsfunktion  $f(x, y, z)$  definiert. Diese ordnet jedem Flächenpunkt  $(x, y, z)$   $\hat{I} S$  einen Wert (z.B. der Dichte) zu. Eine konstante Belegungsfunktion  $f(x, y, z) = const. = c$  führt zu dem Trivialergebnis der Gesamtbelegung der Oberfläche  $cS$ . Ist jedoch  $f(x, y, z)$  variabel, so ermittelt man die Gesamtbelegung mittels Integration:

#### 1. Schritt: Zerlegung in Elemente

Wie bereits bei der Berechnung von Flächeninhalten mittels Oberflächenintegral gezeigt, wird die Oberfläche in Elemente  $DS_1 \dots DS_n$  zerlegt.

#### 2. Schritt: Approximation

Die Belegungsfunktion wird näherungsweise für jede Teilflächen  $DS_i$  konstant angenommen. Für jede Teilfläche  $DS_i$  am Punkt  $(x_i, y_i, z_i)$   $\hat{I} S_i$  wird  $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$  angenommen.

Das ergibt den Näherungswert  $f_i DS_i$  für die Belegung des Elements  $DS_i$  und als Approximation der Gesamtbelegung  $M$  die Summe

$$M \approx f_1 \Delta S_1 + f_2 \Delta S_2 + \dots + f_n \Delta S_n.$$

#### 3. Schritt: Summenbildung und Grenzübergang

Versucht man sich dem genauen Wert zu nähern, gilt es, die Flächenelemente gegen Null gehen zu lassen (bzw.  $n \rightarrow \infty$ ). Damit kann die Belegungsfunktion dann tatsächlich als konstant in jedem Flächenelement angenommen werden. Die Gesamtbelegung erhält man zu

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_1 \Delta S_1 + \dots + f_n \Delta S_n).$$

Die rechte Seite entspricht der bekannten Formulierung des Integrals:  $\iint_S f dS$ ,

also ist 
$$M = \iint_S f dS .$$

Die praktische Berechnung dieses Flächenintegrals erfordert eine geeignete Darstellung von  $S$ .

### Berechnung

Vorausgesetzt die Fläche  $S$  ist in Parameterdarstellung (wie oben gezeigt) gegeben, so erfolgt die Berechnung durch Zerlegung der Fläche durch das oben bereits dargestellte Netz von Parameterlinien. Wie auch oben schon gezeigt gilt:

$$\Delta S \cong |\vec{r}_u(u_i, v_i) \times \vec{r}_v(u_i, v_i)| \Delta u \Delta v .$$

Damit ergibt sich für die Gesamtbelegung

$$M = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

wobei  $D$  der Parameterbereich ist.

### Zusammengefasst:

Die Gesamtbelegung der Oberfläche ergibt sich aus der Integration von  $dM = f(x, y, z) dS$ , wobei unter  $dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$  verstanden wird.

Integrationsbereich ist dabei der Parameterbereich  $D$  der Parameter  $u$  und  $v$ .

### Beispiel:

Ist eine Fläche  $S$  mit Masse einer bekannten Verteilung ( $\mathbf{r}(x, y, z)$ ) belegt, so gilt

$$dm = \mathbf{r}(x, y, z) dS$$

Die Gesamtmasse lässt sich berechnen:

$$m = \iint_S \mathbf{r}(x, y, z) dS$$

In gleicher Weise lässt sich z.B. die Gesamtladung einer geladenen Fläche bei bekannter Verteilung ermitteln.

Zur Ausführung der Berechnung empfiehlt es sich, das oben gezeigte Schema zu nutzen:

- Parameterdarstellung
- Ableitung und Flächennormale berechnen
- Integrationsgrenzen festlegen
- Integration ausführen.

## Fluß durch eine Fläche

Wir wollen die betrachtete Fläche wie schon bisher durch den Normalenvektor  $\vec{n}(x, y, z)$  charakterisieren. Ein solcher Normalenvektor sollte in jedem Punkt der Fläche definiert sein.

Wird nun diese Fläche  $S$  von einem Vektorfeld (z.B. einer Strömung mit bekannter Geschwindigkeitsverteilung) durchsetzt, lässt sich an jedem Punkt der Oberfläche das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)$$

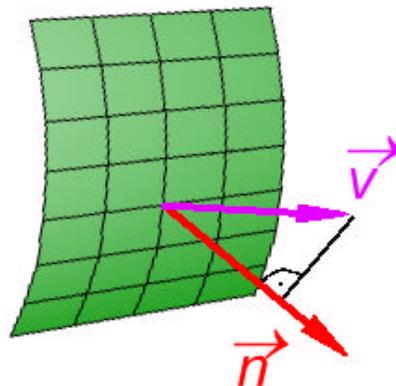
Damit erhält man eine auf der gesamten Fläche  $S$  definierte skalare Funktion.

Das Flächenintegral dieser Funktion

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

wird als Fluss oder Vektorfluss von  $\vec{v}$  durch  $S$  bezeichnet.

Im Beispiel unserer stationären Strömung stellt das Integral das pro Zeiteinheit die Fläche durchströmende Flüssigkeitsvolumen dar. Das ist leicht nachzuvollziehen – das Skalarprodukt  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  lässt sich als Höhe eines Quaders verstehen,  $dS$  als dessen Grundfläche. Das Volumen hat also eine Dimension [Fläche · Geschwindigkeit], was bei einer stationären Strömung gleichzeitig [Volumen / Zeit] ist.



## Berechnung

Zur Berechnung des Flusses wählen wir wieder die Parameterdarstellung des Ortsvektors  $\vec{r}$  und damit der Fläche  $S$

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v)$$

Diese Parameterdarstellung sollte so gewählt sein, daß an allen Stellen der Fläche

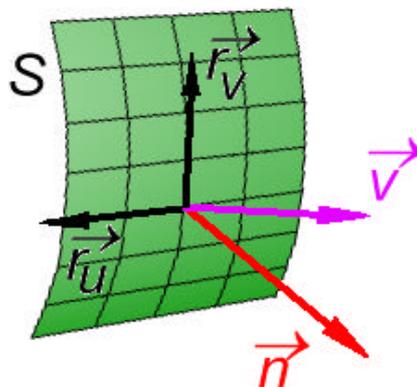
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

Der Einheitsvektor  $\vec{n}(x, y, z)$  ergibt sich dann zu

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

Und der gesuchte Fluß des Vektorfeldes  $\vec{v}$  durch die Fläche  $S$  ist

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D \left[ \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \right] \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot dudv = \iint_D [\vec{v}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot dudv$$



dabei bezeichnet  $[\vec{v}, \vec{r}_u, \vec{r}_v]$  das Spatprodukt des Vektors  $\vec{v}$  und der Tangentenvektoren  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ .

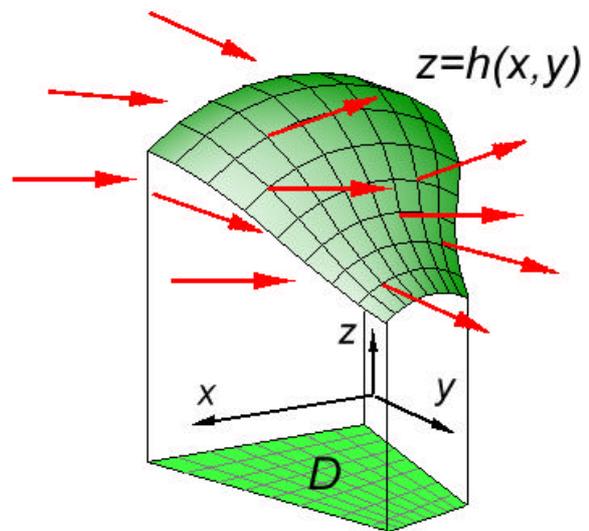
### Sonderfall

Der Graph  $z = h(x, y)$  hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(x, y, z) = [x, y, h(x, y)].$$

Damit ergibt sich für den Fluss des Feldes  $\vec{v}$  durch die Fläche  $S$  in Richtung der positiven z-Achse:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS &= \iint_D [\vec{v}, \vec{r}_x, \vec{r}_y] dx dy \\ &= \iint_D \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \end{bmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (-v_1 h_x - v_2 h_y + v_3) dx dy \end{aligned}$$



### Beispiel

Der Fluss des Feldes  $\vec{v} = [3y, 2x, 0]$

durch das ebene Rechteck  $z = 6 - \frac{2}{3}y - \frac{3}{20}x$  im Bereich  $2 \leq x \leq 5; 1 \leq y \leq 4$

beträgt in Richtung der positiven z-Achse

$$\int_1^4 \int_2^5 \left( -3y \cdot \left( \frac{3}{20} \right) - 2x \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) + 0 \right) dx dy = \frac{417}{8}$$