Fourier-Integral / Fourier-Transformation, Beispiele

Fourier-Transformation in komplexer Darstellung mit der Variablen „Zeit“

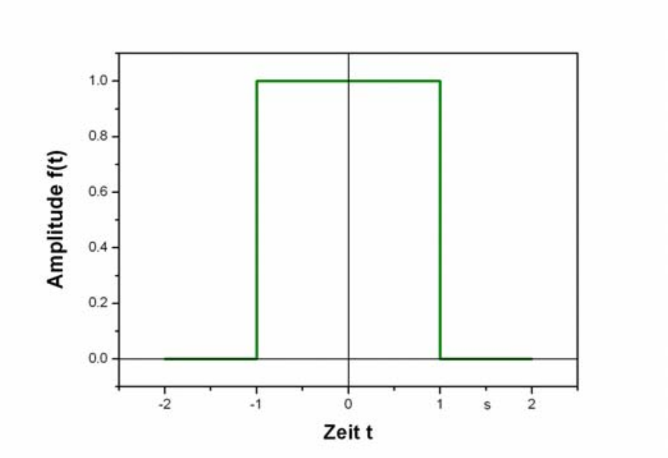
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

Die Fourier-Transformierte F(ω) ist eine komplexe Funktion von ω:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

Beispiel:

„Rechteck-Puls der Breite 2T“

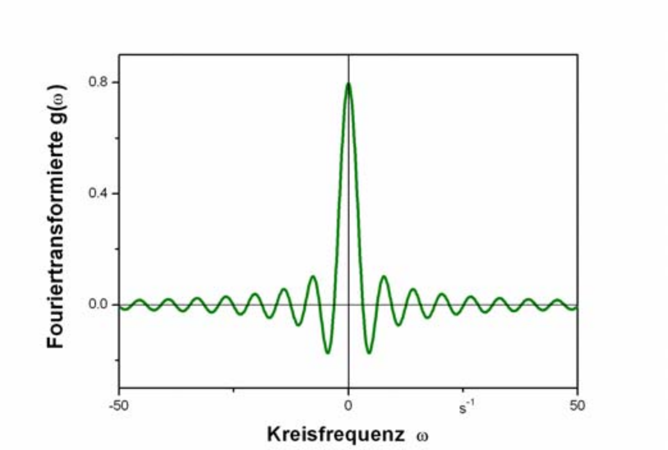


$$f(t)=1 \quad für -T<t\le T$$
$$f(x)=0 \quad ausserhalb$$

$$T=1$$

Fourier-Transformierte:

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{+T}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{-i\omega}\cdot\left[e^{-i\omega t}\right]_{-T}^{+T}=$$
$$=\frac{2}{\omega\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{+i\omega T}-e^{-i\omega T}}{2i}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega T}{\omega}$$



Als Fourier-Transformierte ergibt sich eine oszillierende Funktion in ω.

Die ersten Nulldurchgänge liegen bei $\omega=\pm\pi/T$, deren Abstand bei **$\Delta\omega = 2\pi/T$.**

Die Breite des ursprünglichen Impulses war

$\Delta t = 2T$.

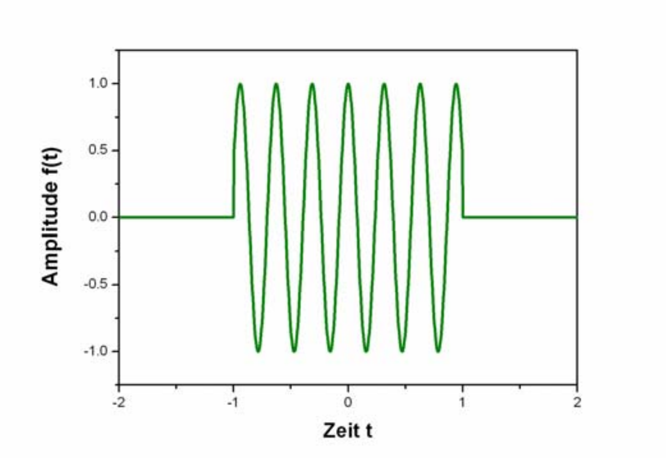
Damit ergibt sich eine Relation:

$\Delta\omega \sim 1/\Delta t$.

Je schmaler der Rechteckimpuls - desto breiter die Frequenzverteilung g(ω) und umgekehrt.

Beispiel:

„endlicher Wellenzug“

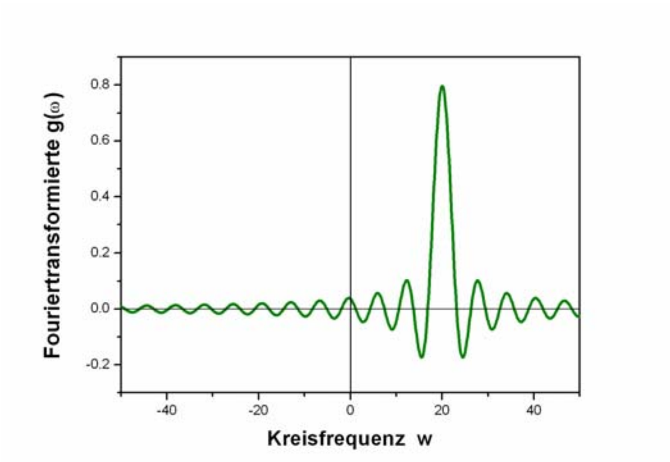


$$f(t) = e^{i\omega_0 t} \qquad für -T < t \leq T$$
$$f(x) = 0 \qquad ausserhalb$$

$$T = 1; \quad \omega_0 = 20$$

Fourier-Transformierte:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)t} \right]_{-T}^{+T} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega} \cdot sin(\omega_0 - \omega)T$$



Es ergibt sich eine Fourier-Transformierte ähnlich der einer Rechteckfunktion - aber um den Betrag ω_0 verschoben.