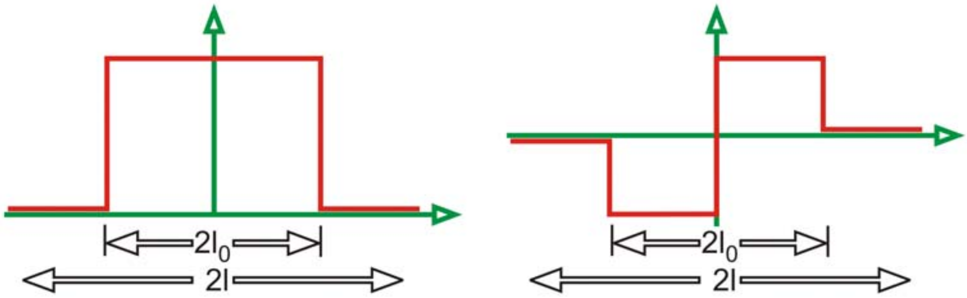
Fourier-Integrale

Im Kapitel Fourier-Reihen wurde gezeigt, das eine beliebige periodische Funktion als Reihe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden kann.

Fragestellung: Lässt sich eine nicht-periodischen Funktion (z.B. nicht-periodisches zeitlich begrenztes Signal) wie ein einzelner Impuls im Rahmen des Fourier-Formalismus betrachten?
Zur Veranschaulichung könnte man sich Funktionen wie die nachfolgend abgebildeten vorstellen:



Für die Beantwortung dieser Frage muss ein Grenzfall betrachtet werden.
Das Intervall $(-l\ ,l)$, in dem die Fourier-Reihe untersucht wird, möge gegen $(-\infty,+\infty)$, d.h. $l \to \infty$ streben, wogegen das Intervall $(-l_0\ ,l_0)$ konstant bleibt.

Die nachfolgenden Betrachtungen sind nur bei Gelten der **Konvergenzbedingung** möglich, d.h. die betrachtete Funktion sei $f(x)$ stetig und genüge der Dirichlet'schen Bedingung in jedem endlichen Intervall und sei darüber hinaus über das Intervall $(-\infty,+\infty)$ ganz oder stückweise integrierbar und verschwindet im Unendlichen; es existiert also das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Gemäß dem Reihenentwicklung gilt in $(-l\ ,l)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

mit $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi t}{l}dt \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\sin\frac{n\pi t}{l}dt$,

wobei die Größe t hier eingeführt wurde, um Verwechslungen zu vermeiden.

Es folgt

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi t}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dt + \int_{-l}^{l} f(t)\cdot\sin\frac{n\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dt \right)$$

unter Verwendung von

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$ und

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$ (siehe unter „trigonometrische Funktionen“)

ergibt sich

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}+\cos\frac{n\pi(t+x)}{l}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}-\cos\frac{n\pi(t+x)}{l}\right)dt$$

und damit

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt$$

Was passiert beim Grenzübergang $l\to\infty$?

Betrachten wir das **erste Glied**:

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt\le\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt\le\frac{I}{2l}$$

Wegen des Nenners $2l$ strebt dieses Glied bei $l\to\infty$ gegen Null.

Für die Betrachtung des **2. Gliedes** führen wir eine neue Variable a_n ein.
Im Intervall $(0,\infty)$ nimmt diese äquidistante Werte an:

$$a_1=\frac{\pi}{l};\quad a_2=\frac{2\pi}{l};\quad ...;\quad a_n=\frac{n\pi}{l}$$

Der Zuwachs ergibt sich damit zu $\Delta a=\frac{\pi}{l}$ und damit $\frac{1}{l}=\frac{\Delta a}{\pi}$.

Für das 2. Glied der Summe ergibt sich somit:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt=\frac{1}{\pi}\sum_{a=0}^{\infty}\Delta a\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\, a_n(t-x)dt$$

Betrachtet man den Fall großer n, so sieht man dass Δa immer kleiner wird und im Grenzfall $l\to\infty$ unendlich klein wird - also $\Delta a\to da$. Aus den bislang diskreten Werten a_n wird eine Funktion $a(n)$ und aus der Summe ein Integral:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{a=1}^{\infty}\Delta a\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\, a_n(t-x)dt\to\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos\, a(t-x)dt\right)da$$

Für die betrachtete Funktion $f(x)$ ergibt sich also unter Berücksichtigung beider Glieder der oben dargestellten Summe:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos\, a(t-x)dt\right)da$$

Diese Formel ist das *Fourier-Integral der Funktion f(x).*

Die Formel kann umgeformt werden, wenn die Funktion *f(x)* gerade oder ungerade ist.

Wegen

$$\cos a(t-x) = \cos at \cos ax + \sin at \sin ax$$

folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\ a(t-x)dt\right)da = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos\ at\cdot\cos axdt\right)da + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\sin at\cdot\sin axdt\right)da$$

- Ist *f(t)* eine **gerade Funktion**, so ist auch $f(t)\cdot\cos\ at$ eine gerade Funktion, $f(t)\cdot\sin at$ dagegen ist ungerade. $\sin ax$ bzw. $\cos ax$ sind bezüglich *t* konstant, können also aus dem Integral herausgezogen werden und es gilt:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos atdt = 2\cdot\int_0^{+\infty} f(t)\cos atdt\ ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin atdt = 0$$

  Damit ergibt sich:

  $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ax\left(\int_0^{\infty} f(t)\cos atdt\right)da$$

  Zur Vereinfachung führt man eine neue Größe, das Amplitudenspektrum ein:

  $$A(a) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} f(t)\cos atdt = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos atdt$$

  und kann nun im Falle einer **geraden Funktion** *f(t)* schreiben:

Fourier-Kosinustransformation mit dem **Amplitudenspektrum** *A(a)*

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(a)\cdot\cos ax\ da \quad \text{mit} \quad A(a) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} f(t)\cos atdt = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos atdt$$

- Ist *f(t)* eine **ungerade Funktion**, so ist $f(t)\cdot\cos\ at$ ungerade und $f(t)\cdot\sin at$ gerade.

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin atdt = 2\cdot\int_0^{+\infty} f(t)\sin atdt\ ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos atdt = 0$$

  Daraus ergibt sich:

  $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin ax\left(\int_0^{\infty} f(t)\sin atdt\right)da$$

Wiederum vereinfacht man mit einer neuen Größe:

$$B(a) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \sin atdt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin atdt$$

und kann nun im Falle einer ungeraden Funktion $f(t)$ schreiben:

Fourier-Sinustransformation mit dem **Amplitudenspektrum** $B(a)$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} B(a) \cdot \sin ax \, da \quad \text{mit} \quad B(a) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\infty} f(t) \sin atdt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin atdt$$

Im allgemeinen Fall, wenn weder eine gerade noch eine ungerade Funktion $f(x)$ vorliegt, gilt:

Allgemeine Fourier-Transformation mit den **Amplitudenspektren** $A(a)$ und $B(a)$

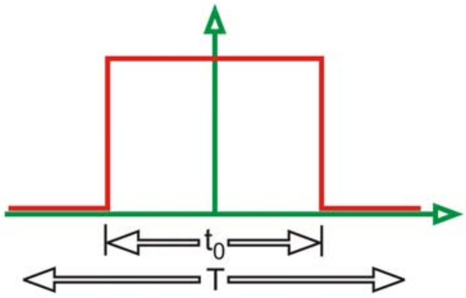
$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left[A(a) \cdot \cos ax + B(a) \cdot \sin ax \right] da \quad \text{mit}$$

$$A(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos atdt \quad \text{und} \quad B(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin atdt$$

Beispiel: zeitlicher Rechteck-Impuls (gerade Funktion)

Als Beispiel und Anwendung soll ein Rechteckimpuls wie im Bild dargestellt betrachtet werden.
Der Rechteckimpuls habe eine Dauer t_0 und anfänglich möge er sich mit der Periode T wiederholen.
Um ein einmaliges Ereignis zu erhalten, lassen wir später T über alle Maße wachsen; $T \to \infty$.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -T \le t \le -t_0/2 \\ 1 & \text{für} \quad -t_0/2 \le t \le t_0/2 \\ 0 & \text{für} \quad t_0/2 \le t \le T \end{cases}$$



entsprechend Abschnitt Fourier-Reihen folgt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n2\pi}{T} t \right]$$

Die Koeffizienten sind bestimmt mit:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \ , \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos \frac{n2\pi t}{T} dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin \frac{n2\pi t}{T} dt$$

Konkret bedeutet das:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} 1\cdot dt = \frac{2t_0}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} 1\cdot\cos\frac{n2\pi t}{T}\,dt \qquad \text{mit } z = \frac{2n\pi t}{T};\;\; z_0 = \frac{2\pi n t_0}{T};\;\; dz = \frac{2\pi n}{T}dt;\;\; dt = \frac{T}{2\pi n}dz \text{ folgt}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\int_{-z_0/2}^{z_0/2}\cos z\;dz = \frac{1}{\pi n}\int_{-z_0/2}^{z_0/2}\cos z\;dz = \frac{1}{\pi n}\left[\sin z\right]_{-z_0/2}^{z_0/2} = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{z_0}{2} = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi t_0}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} 1\cdot\sin\frac{n2\pi t}{T}\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\int_{-z_0/2}^{z_0/2}\sin z\;dz = \frac{1}{\pi n}\int_{-z_0/2}^{z_0/2}\sin z\;dz = \frac{1}{\pi n}\left[-\cos z\right]_{-z_0/2}^{z_0/2} = 0$$

Damit ergibt sich als Lösung für einen Impuls t_0, der sich mit der Periode T wiederholt:

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t_0}{T}\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\right]$$

Der Periodendauer T entspricht dabei eine Grundfrequenz $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, womit sich schreiben lässt:

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\omega_0 t_0}{2}\cdot\cos n\omega_0 t\right] = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\omega\frac{t_0}{2}\cdot\cos\omega t\right]$$

Die Summanden mit $n > 1$ lassen sich mit $\omega = n\omega_0 = n\cdot\dfrac{2\pi}{T}$ vereinfachen.

In unserer Fourier-Reihe werden diskrete Glieder aufsummiert. Dabei erhöht sich die Laufzahl n von Glied zu Glied um $\Delta n=1$, außerdem ist $\omega_0 = 2\pi/T$, $\omega = 2\pi n/T$ und $\Delta\omega = 2\pi/T$.

Folglich ergibt sich für den Quotienten $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{2\pi/T}{2\pi n/T} = \dfrac{1}{n}$.

Setzt man dies in jedem der Glieder für $1/n$ ein, ergibt sich:

$$f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\omega\pi}\cdot\sin\omega\frac{t_0}{2}\cdot\cos\omega t\cdot\Delta\omega$$

Man kommt nun zur Darstellung des einzelnen Signals, wenn man in der dargestellten Fourierreihe die Periodendauer T gegen Unendlich gehen lässt, wobei die Dauer des Signals t_0 beibehalten wird. Damit entfernen sich die Signale beliebig weit voneinander – wir erhalten die Darstellung eines einzelnen nicht-periodischen Signals.

Vollzieht man nun den Grenzübergang $T \to \infty$ geht das Glied $t_0/T \to 0$ und aus der Summe ergibt sich das **Fourier-Integral:**

$$\boxed{f(t) = \int_0^\infty \frac{2}{\omega\pi} \cdot \sin\omega\frac{t_0}{2} \cdot \cos\omega t \cdot d\omega}$$

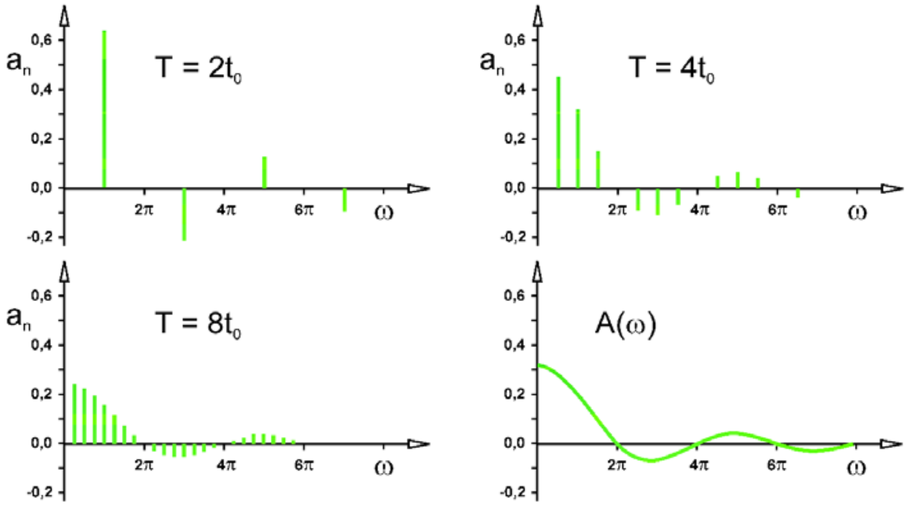
Häufig wird auch folgende Schreibweise benutzt:

$$\boxed{f(t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t \cdot d\omega \qquad mit \qquad A(\omega) = \frac{2}{\omega\pi} \cdot \sin\omega\frac{t_0}{2}}$$

Der Ausdruck $A(\omega)$ heißt **Amplitudenspektrum**.

Die gezeigte Rechteckfunktion ist eine <u>gerade</u> Funktion. Daher tritt im Fourier-Integral nur der Kosinus auf. In diesem Fall spricht man wie bereits oben von einer **Fourier-Kosinus-Transformation**.

Was formal abgeleitet wurde, sei an einer Zeichnung verdeutlicht.



Die Abbildung zeigt für ein Rechtecksignal der Dauer $t_0 = 1$ die Fourier-Koeffizienten für die Perioden: $T=2$, $T=4$, $T=8$ sowie das kontinuierliche Amplitudenspektrum $A(\omega)$.

Mit wachsender Periode T wird die Frequenz ω_0 der Grundschwingung immer kleiner, es treten immer mehr Glieder der Fourierreihe auf, die Frequenzabstände gehen zurück, die Fourier-Reihe wird dem kontinuierlichen Frequenzspektrum ähnlich.

Beim Fourier-Integral ergibt sich die nicht-periodische Funktion $f(t)$ als Überlagerung unendlich vieler Einzelschwingungen, deren Einzelamplituden zwar gegen 0 streben, deren ***Verteilungsdichte*** aber durch das Amplitudenspektrum gegeben ist. Die Summe der Amplituden, die auf ein Frequenzintervall $\Delta\omega$ entfallen, behält einen endlichen Wert.
Außerhalb des Signals heben sich alle Schwingungen gegenseitig auf; innerhalb der Signaldauer werden sie zu einem endlichen Signalwert aufsummiert.

Fourier-Kosinustransformation

Was anhand der Rechteckfunktion demonstriert und abgeleitet wurde, ist allgemein gültig.
Jede ***gerade*** *nicht-periodische zeitliche Funktion* lässt sich darstellen als Fourier-Integral:

Fourier-**Kosinustransformation** für **gerade** nicht-periodische Funktionen der Zeit

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

Amplitudenspektrum

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt$$

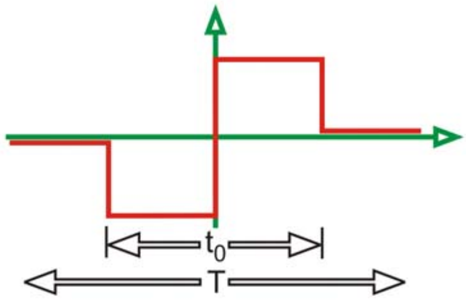
Für die vorliegende Rechteckfunktion:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega\pi}\left[\sin\omega t\right]_{-t_0/2}^{t_0/2} = \frac{2}{\omega\pi}\cdot\sin\omega\frac{t_0}{2}$$

Beispiel: zeitlicher Rechteck-Impuls (ungerade Funktion)

Als weiteres Beispiel und Anwendung soll ein Rechteckimpuls in Form einer ungeraden Funktion wie im Bild dargestellt betrachtet werden.
Der Impuls habe eine Dauer t_0 und anfänglich möge er sich mit der Periode T wiederholen.
Um ein einmaliges Ereignis zu erhalten, lassen wir später T über alle Maße wachsen; $T \to \infty$.

$$f(t) = \begin{cases} -1 \quad \text{für} \quad -\dfrac{t_0}{2} \le t \le 0 \\ +1 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le \dfrac{t_0}{2} \end{cases}$$



Wie bereits oben gilt entsprechend Abschnitt Fourier-Reihen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n2\pi}{T}t + b_n\sin\frac{n2\pi}{T}t\right]$$

Mit den entsprechenden Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-t_0/2}^{0}(-1)\cdot dt + \frac{2}{T}\int_0^{t_0/2} 1\cdot dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-t_0/2}^{0}(-1)\cdot\cos\frac{n2\pi t}{T}dt + \frac{2}{T}\int_0^{t_0/2} 1\cdot\cos\frac{n2\pi t}{T}dt$$

mit $z = \frac{2n\pi t}{T}; \;\; z_0 = \frac{2\pi n t_0}{T}; \;\; dz = \frac{2\pi n}{T} dt; \;\; dt = \frac{T}{2\pi n} dz$ folgt

$$a_n = -\frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} \int\limits_{-z_0/2}^{0} \cos z \; dz + \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} \int\limits_{0}^{z_0/2} \cos z \; dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \int\limits_{-z_0/2}^{0} \cos z \; dz + \frac{1}{\pi n} \int\limits_{0}^{z_0/2} \cos z \; dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left[\sin z\right]_{-z_0/2}^{0} + \frac{1}{\pi n} \left[\sin z\right]_{0}^{z_0/2} = -\frac{1}{\pi n} \sin \frac{z_0}{2} + \frac{1}{\pi n} \sin \frac{z_0}{2} = 0$$

$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-t_0/2}^{0} (-1) \cdot \sin \frac{n 2\pi t}{T} dt + \frac{2}{T} \int\limits_{0}^{t_0/2} 1 \cdot \sin \frac{n 2\pi t}{T} dt$ substituiert man t folgt:

$$b_n = -\frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} \int\limits_{-z_0/2}^{0} \sin z \; dz + \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} \int\limits_{0}^{z_0/2} \sin z \; dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \int\limits_{-z_0/2}^{0} \sin z \; dz + \frac{1}{\pi n} \int\limits_{0}^{z_0/2} \sin z \; dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left[-\cos z\right]_{-z_0/2}^{0} + \frac{1}{\pi n} \left[-\cos z\right]_{0}^{z_0/2} = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \frac{z_0}{2}) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \frac{\pi n t_0}{T}) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \frac{\omega t_0}{2})$$

Damit ergibt sich als Lösung für den gegebenen Impuls t_0, der sich mit der Periode T wiederholt:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{\omega t_0}{2}) \cdot \sin \frac{2n\pi t}{T} \right]$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang $T \to \infty$ ergibt sich das **Fourier-Integral:**

$$f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2}{\omega\pi} (1 - \cos \frac{\omega t_0}{2}) \cdot \sin \frac{2n\pi t}{T} \cdot d\omega$$

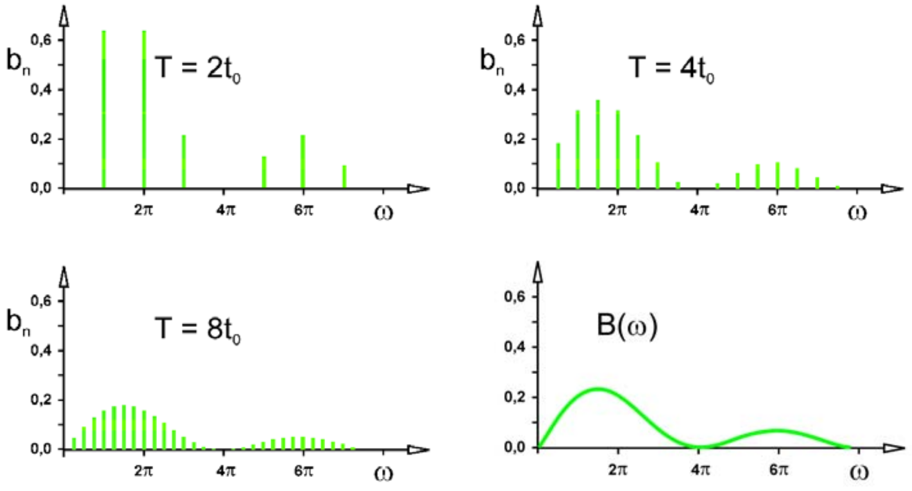
Häufig wird auch folgende Schreibweise benutzt:

$$\boxed{f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \cdot d\omega \qquad mit \qquad B(\omega) = \frac{2}{\omega\pi} \left[1 - \cos \omega \frac{t_0}{2} \right]}$$

Der Ausdruck $B(\omega)$ heißt **Amplitudenspektrum**.

Die gezeigte Rechteckfunktion ist eine <u>ungerade</u> Funktion. Daher tritt im Fourier-Integral nur der Sinus auf. In diesem Fall spricht man wie bereits oben von einer **Fourier-Sinus-Transformation**.

Die Abbildung zeigt die Fourier-Koeffizienten für $t_0 = 1$ und $T = 2t_0$, $T = 4t_0$ und $T = 8t_0$ sowie das kontinuierliche Amplitudenspektrum.



Fourier- Sinustransformation

Für **ungerade** periodische Funktionen verschwinden in der Fourierreihe die a_n und es verbleiben die b_n, also die Sinusfunktionen. Dementsprechend lassen sich ungerade nicht-periodische Funktionen durch eine *Fourier-**Sinustransformation*** darstellen.

Fourier-**Sinustransformation** für **ungerade** nicht-periodische Zeit-Funktionen

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

Amplitudenspektrum

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)dt$$

Im allgemeinen Fall (weder gerade noch ungerade nicht-periodischen Funktion), wenn es nicht möglich ist, durch eine Koordinatentransformation zu einer geraden oder ungeraden Funktion zu kommen, werden beide Anteile berücksichtigt. Dann ergibt sich die allgemeine Fourier-Transformation.

Allgemeine Fourier-Transformation

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left[A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)\right] d\omega$$

Amplitudenspektrum

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)dt \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)dt$$

Komplexe Darstellung der Fourier-Transformation

Unter Benutzung der komplexen Zahlen läßt sich die Fourier-Transformation formulieren:

Fourier-Transformation in komplexer Darstellung

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Die Amplitudenfunktion F(ω) ist eine komplexe Funktion:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die Amplitudenfunktion unterscheidet sich um den Faktor 0,5 von den entsprechenden Amplitudenspektren der Fourier-Kosinus- und Fourier-Sinustransformation.
Die Amplitudenfunktion ist nur halb so groß wie vorher, weil bei der komplexen Darstellung das Fourier-Integral von -∞ bis +∞ erstreckt wird, während es vorher von 0 bis ∞ erstreckt wurde.

Hinweis: Die Schreibweise der Fourier-Transformation wird nicht einheitlich gehandhabt. Folgende gleichwertige Notierungen sind üblich

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die komplexe Amplitudenfunktion läßt sich trennen in das ***kontinuierliche Amplitudenspektrum*** $A(\omega)$ (der Absolutwert) und das ***kontinuierliches Phasenspektrum*** $e^{-i\varphi(\omega)}$ (die Phasenlage).

$$F(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-i\varphi(\omega)}$$

Hat $F(\omega)$ den Realteil $ReF(\omega)$ und den Imaginärteil $ImF(\omega)$, dann erhalten wir das kontinuierliche Amplitudenspektrum durch

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re} F(\omega))^2 + (\operatorname{Im} F(\omega))^2}$$

und den Phasenwinkel, das kontinuierliche Phasenspektrum:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)}$$

Beispiel: Wir berechnen erneut das Amplitudenspektrum für die Rechteckfunktion der Dauer t_0. Dabei gehen wir von der Lage aus, die wir bei der Fourierkosinustransformation voraussetzten. Dann erhalten wir die Amplitudenfunktion

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega 2\pi} \left[e^{-i\omega t} \right]_{-t_0/2}^{+t_0/2} = -\frac{1}{i\omega 2\pi} \left[-e^{i\omega t_0/2} - e^{-i\omega t_0/2} \right] = \frac{1}{\omega\pi} \cdot \sin\left(\omega \frac{t_0}{2} \right)$$

Wie bereits erwähnt, müssen wir den halben Wert des Amplitudenspektrums der Fourier-Kosinus-Transformation erhalten. Das ist hier der Fall.

Verschiebungssatz

Wir berechnen das Amplitudenspektrum für die Rechteckfunktion in einer beliebigen Lage. Beliebige Lage bedeutet, daß die Funktion um die Zeit t_1 verschoben ist.
Die Amplitudenfunktion ergibt sich zu

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}+t_1}^{+\frac{t_0}{2}+t_1} e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega 2\pi} \cdot e^{-i\omega t_1} \left[e^{-i\omega\frac{t_0}{2}} - e^{i\omega\frac{t_0}{2}} \right] = \frac{1}{\omega\pi} \cdot \sin\omega\frac{t_0}{2} \cdot e^{-i\omega t_1}$$

Das Amplitudenspektrum der Rechteckfunktion hat sich nicht verändert, es ist:

$$|F(\omega)| = A(\omega) = \frac{1}{\omega\pi} \cdot \sin\omega\frac{t_0}{2}$$

D.h. das Amplitudenspektrum der Rechteckfunktion ist *unabhängig* von der Lage. Das hier für den speziellen Fall erhaltene Ergebnis gilt allgemein. Wird eine Funktion um die Zeit t_1 verschoben, bleibt das Amplitudenspektrum erhalten. Die Amplitudenfunktion wird mit dem folgenden Faktor multipliziert:

$$e^{i\omega t_1}$$

Dieser Zusammenhang wird *Verschiebungssatz* genannt.

Verschiebungssatz:

Das Amplitudenspektrum bleibt erhalten, wenn eine Funktion um die Zeit t_1 verschoben wird.

Die Amplitudenfunktion der verschobenen Funktion ist gegeben durch:

$$F\left[f(t-t_1)\right] = F(f(t)) \cdot e^{-i\omega t_1}$$

Diskrete Fourier-Transformation, Abtasttheorem

Ohne Beweis: Eine Fourier-Transformation kann auch durchgeführt werden, wenn statt der Funktion *f(t)* diskrete Werte dieser Funktion vorliegen (wenn z.B. Funktionswerte in gleichen zeitlichen Abständen gemessen - abgetastet – werden).
Beispiel: Digitale Tonaufzeichnung.
Aus den Abtastwerten läßt sich die ursprüngliche Funktion $f(t)$ rekonstruieren.

Dabei gibt es allerdings eine Randbedingung: Wenn im Zeittakt Δt abgetastet wird, ist die Abtastfrequenz gegeben durch

$$\omega_{Abtast} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Eine vollständige Rekonstruktion der Funktion $f(t)$ aus den Abtastwerten ist nur möglich, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die größte im Amplitudenspektrum vorkommende Frequenz.
Dieser Sachverhalt ist von Shannon gefunden und heißt ihm zu Ehren ***Abtasttheorem von Shannon.***

$$\omega_{\max} < 2 \cdot \omega_{Abtast}$$

Fourier-Transformation der Gaußschen Funktion

Bei der Gauß-Funktion wird das Amplitudenspektrum durch den gleichen Funktionstyp dargestellt, wie die Ausgangsfunktion:

Gauß-Funktion $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{a}{2}t^2}$ mit der Amplitudenfunktion $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

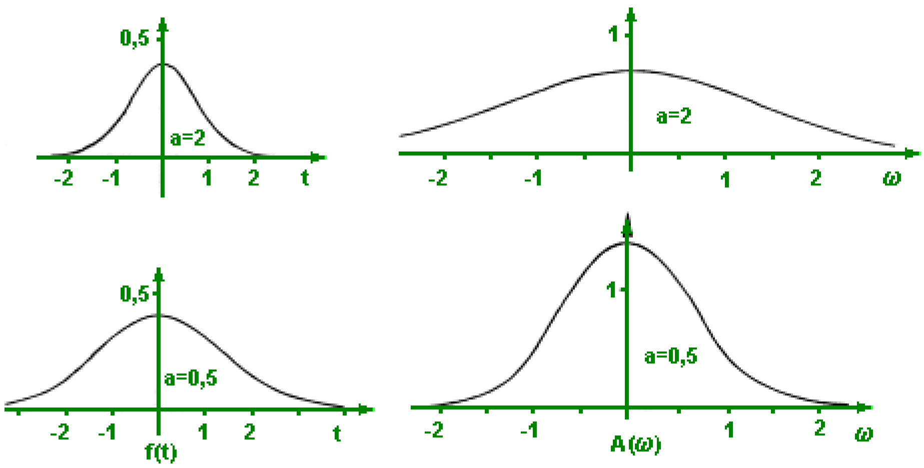
Es gelten also folgende Beziehungen

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}t^2} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Physikalische Bedeutung:

- Ein großer Wert für **a** bedeutet - ein im Zeitbereich schmales Signal.
  Dafür erhält man im Frequenzbereich ein breites Amplitudenspektrum.
- Ein kleiner Wert für **a** bedeutet - ein im Zeitbereich breites Signal.
  Dafür erhält man im Frequenzbereich ein schmales Amplitudenspektrum.



Dieser Zusammenhang gilt allgemein. Zur Demonstration seien hier noch die Amplitudenspektren für ein alternierendes Rechtecksignal dargestellt, dessen Breite im Zeitbereich variiert. Auch hier gilt: Einem im Zeitbereich engen Signal entspricht ein im Frequenzbereich breites Amplitudenspektrum.