Reihenentwicklung – die Fourier-Reihe

Eine Funktion *f(x)* mit der Periode 2p läßt sich darstellen als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

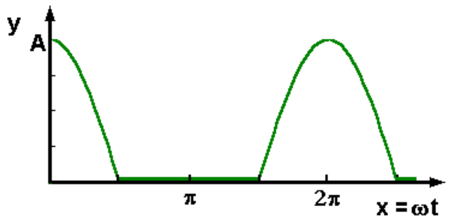
mit den Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\sin(nx)dx$$

Beispiel:

„Einweg-Gleichrichtung“

Die Funktion stellt einen „abgeschnittene“ Cosinus-Funktion dar. Das ist vom Erscheinungsbild her etwa das, was man als Spannungsverlauf bei einer Einweg-Gleichrichtung in der Elektrotechnik erhält.



$$f(x) = A\cdot\cos x \qquad \text{für } 0 \le x \le \frac{p}{2}$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{für } \frac{p}{2} \le x \le \frac{3p}{2}$$

$$f(x) = A\cdot\cos x \qquad \text{für } \frac{3p}{2} \le x \le 2p$$

Lösung:

$$\boxed{y = f(x) = \frac{A}{p}\left[1 + \frac{p}{2}\cos x + \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{2}{5\cdot 7}\cos 6x - \ldots\right]}$$

Lösungsweg:

Entsprechend der obigen Formel werden die Fourier-Koeffizienten bestimmt.

Bestimmung von a_0:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{3p/2}^{5p/2} A\cos x dx = \frac{A}{p}\sin x\Big|_{3p/2}^{5p/2} = \frac{A}{p}(1+1) = \frac{2A}{p}$$

in die Fourier-Reihe eingesetzt wird $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{p}$

Bestimmung von a_1:

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{3p/2}^{5p/2} A\cos x\cdot\cos(1\cdot x)dx = \frac{A}{2p}(\sin x\cdot\cos x + x)\Big|_{3p/2}^{5p/2} = \frac{A}{2p}\left(\frac{5p}{2} - \frac{3p}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

- Integration unter Verwendung der Produktregel ($\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$)
- nach Anwendung entsteht Integral über $\sin^2 x$.
- Umwandlung $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- Integral über $\cos^2 x$ auf die linke Seite bringen und alles durch 2 dividieren.

Bestimmung von a_n mit n>1:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} A\cos x \cdot \cos(n \cdot x)dx = \frac{A}{\pi(n^2-1)}(n \cdot \cos x \cdot \sin nx - \sin x \cdot \cos nx)\Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}$$

- 2 mal Verwendung der Produktregel
- $(n^2-1)=(n-1)\cdot(n+1)$

- **Bestimmung von a_2**

$$a_2 = \frac{A}{\pi \cdot 1 \cdot 3}(2 \cdot \cos x \cdot \sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x)\Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}$$
$$= \frac{A}{\pi \cdot 1 \cdot 3}[(0+1)-(0-1)] = \frac{A}{\pi \cdot 1 \cdot 3} \cdot 2$$
$$= \frac{2 \cdot A}{\pi \cdot 1 \cdot 3}$$

- **Bestimmung von a_3**

$$a_3 = \frac{A}{\pi \cdot 2 \cdot 4}(3 \cdot \cos x \cdot \sin 3x - \sin x \cdot \cos 3x)\Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}$$
$$= \frac{A}{\pi \cdot 1 \cdot 3}[(0+0)-(0-0)] = 0$$

- **Bestimmung von a_4:**

$$a_4 = \frac{A}{\pi \cdot 3 \cdot 5}(4 \cdot \cos x \cdot \sin 4x - \sin x \cdot \cos 4x)\Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}$$
$$= \frac{A}{\pi \cdot 3 \cdot 5}[4 \cdot (0-1) - (0-(-1))] = -\frac{A}{\pi \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2$$
$$= -\frac{2 \cdot A}{\pi \cdot 3 \cdot 5}$$

usw.

Das Einsetzen weiterer Werte überlasse ich jedem selbst.