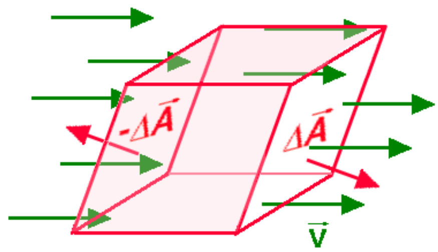
Erzeugung eines Skalars durch räumliche Differentiation einer vektoriellen Größe

Divergenz - der Gaußsche Integralsatz

- Divergenz ist als Wort aus der Strahlenoptik bekannt
- wird hier aber viel allgemeiner gebraucht:

  Unter Divergenz verstehen wir das „Netto“ der aus einem Raumgebiet kommenden Vektoren des betrachteten Vektorfeldes.

- **Beispiel:**
  - Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = const.$,
  - parallele Lichtstrahlen,
  - Ausbreitung in Pfeilrichtung,
  - Pfeillänge entspricht Anzahl der Photonen je Sekunde



Der Lichtstrom J durch die Fläche ΔA berechnet sich mit dem Skalarprodukt $J = \vec{v} \cdot \Delta\vec{A}$.
Er ist für beide Flächen bis auf das verschiedene Vorzeichen identisch.

Anmerkung: Für die seitlichen Flächen ergibt sich ohnehin Null, da der Flächenvektor und das Vektorfeld senkrecht zueinander stehen. Daher folgt für das Skalarprodukt $J = \vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = 0$.

- Liegt im inneren des Volumens Absorption vor, so wird $J_{links} > J_{rechts}$
  Man spricht von einer negativen Ergiebigkeit, von einer **"Senke"** im Spatvolumen.
  Die im Spat absorbierte Lichtmenge lässt sich mit Hilfe des Oberflächenintegrals berechnen:
  $$J_S = J_{Senke} = \oint_O \vec{v}\, d\vec{A} < 0$$
- Liegt im inneren des Volumens eine Lichtquelle vor, so wird $J_{links} < J_{rechts}$
  Man spricht von einer positiven Ergiebigkeit, einer **"Quelle"** im Spatvolumen.

- Die von der Quelle gelieferte Lichtmenge lässt sich berechnen
  $$J_Q = J_{Quelle} = \oint_O \vec{v}\, d\vec{A} > 0$$
  Die Ergiebigkeit des betrachteten Volumens kann auch dargestellt werden über die Ergiebigkeit J_P eines Raumpunktes oder „Raumabschnittes“ ΔV
  Für die Ergiebigkeit eines Quadervolumens (homogen in Bezug auf die Leuchtdichte) gilt dann:

  $$J_{Q,S} = \oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = J_P \cdot V$$ J_P: Ergiebigkeit pro Raumpunkt, Leuchtdichte

Die **Gesamtergiebigkeit** $J_{Q,S}$ ist gleich der Ergiebigkeit eines einzelnen Raumpunktes multipliziert mit der Anzahl der leuchtenden Raumpunkte.
Der allgemeine Fall kann durch ein entsprechendes Volumenintegral berechnet werden:

$$J_{Q,S} = \oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V J_P \cdot dV$$ V - Spatvolumen, $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ - Volumenelement.

Definition des Divergenzbegriffs

Ausgangspunkt für die skalare Größe „**Divergenz**“ ist die eben abgeleitete Integralbeziehung. Vereinfacht (kleines Volumen, homogenes Feld) lässt sich das Integral mittels endlicher Größen für einen Quader als Summe schreiben:

$$\oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \Delta v_x \cdot \Delta A_x + \Delta v_y \cdot \Delta A_y + \Delta v_z \cdot \Delta A_z =$$

$$= J_P \cdot \Delta V = J_P \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

wegen $\Delta A_x = \Delta y \cdot \Delta z, \quad \Delta A_y = \Delta z \cdot \Delta x, \quad \Delta A_z = \Delta x \cdot \Delta y, \qquad \Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ergibt sich:

$$J_P = \frac{\Delta v_x \cdot \Delta A_x + \Delta v_y \cdot \Delta A_y + \Delta v_z \cdot \Delta A_z}{\Delta V} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta V}\oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

und im allgemeinen Fall:

$$J_P = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta z}\right) = \frac{1}{V}\oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Somit ergibt sich für die Ergiebigkeit eines Einzelpunktes (Grenzübergang Quadervolumen → 0) die Beziehung:

$$J_P = div\,\vec{v} = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}$$

Man definiert die Divergenz eines Vektors $\vec{v}$ durch die Differentialoperation

$$div\,\vec{v} = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}$$

und versteht darunter die Ergiebigkeit eines Raumpunktes (Quelldichte).

Die Divergenzbildung von einem Vektor führt immer zu einem Skalar.

Die Gesamtergiebigkeit eines endlichen Raumvolumens kann unter Zuhilfenahme der bereits bekannten Integralbeziehung und der Quelldichte wie folgt berechnet werden:

$$\oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V J_P \cdot dV$$

Diese Gleichung wird als **"Gaußscher Integralsatz"** bezeichnet und läßt sich schreiben:

$$\oint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V div\,\vec{v} \cdot dV$$

Das Oberflächenintegral des Vektors $\vec{v}$, genommen über eine geschlossene Oberfläche, ist gleich dem Raumintegral der Divergenz des Vektors $\vec{v}$, genommen über das eingeschlossene Volumen.

Divergenz - alternative Darstellung: **physikalisches Beispiel**

- im Inneren einer geschlossenen Fläche befindet sich die elektrische Ladungsdichte ρ mit
$$\rho = \frac{dQ}{dV}; \qquad \bar{\rho} = \frac{Q}{V}$$

- an positiven Ladungen entspringen die Feldvektoren (Quellen), an negativen Ladungen enden sie (Senken).

- Wie bereits gesehen *(Fluss eines radialsymmetrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche - Skript Oberflächenintegral)* gilt:
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Division durch das Volumen ergibt eine **mittlere Quellendichte**
$$\frac{1}{V} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}$$

  wenn die Quellendichte in einem **Punkt** interessiert:
$$div\, \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Die ermittelte Divergenz liefert eine eindeutige Aussage, ob der Punkt P zu den Quellen des Vektorfeldes ($div\vec{E} > 0$) oder den Senken des Vektorfeldes ($div\vec{E} < 0$) gehört.

Im Falle $div\vec{E} = 0$ ist das Feld quellen- und senkenfrei.

In Anlehnung an dieses Betrachtung bezeichnet man die Divergenz auch als die Quellenstärke eines Vektorfeldes.
Die Divergenz ist ein Skalarfeld, das an **jedem Punkt** angibt, ob das Feld dort eine Quelle/Senke besitzt und wie ergiebig diese ist.

Divergenz des Gradientenvektors - der Laplace-Operator Δ

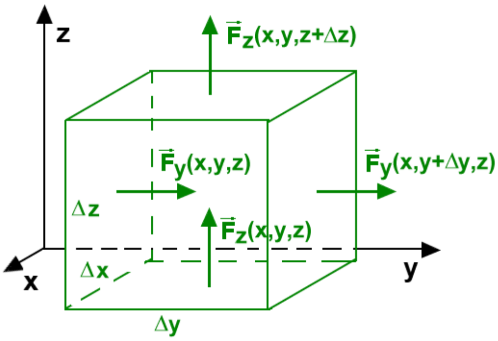
Da die Operation „Divergenz" auf jegliche Vektorfelder anwendbar ist, lässt sie sich auch auf das Vektorfeld des Gradienten $gr\vec{a}d\ f$ anwenden:

$$\boxed{div\, gr\vec{a}d\ f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Herleitung einer praktischen Rechenvorschrift:

- bereits bekannt:

$$div\,\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_A \vec{F}\cdot d\vec{A}$$



- Wir versuchen eine Näherung über endliche Größen:

$$\frac{1}{V}\oint \vec{F}\cdot d\vec{A} \approx \frac{1}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\{[F_x(x+\Delta x,y,z)-F_x(x,y,z)]\Delta y\,\Delta z +$$
$$+[F_y(x,y+\Delta y,z)-F_y(x,y,z)]\Delta x\,\Delta z +$$
$$+[F_z(x,y,z+\Delta z)-F_z(x,y,z)]\Delta x\,\Delta y\} =$$
$$= \frac{F_x(x+\Delta x,y,z)-F_x(x,y,z)}{\Delta x} +$$
$$+\frac{F_y(x,y+\Delta y,z)-F_y(x,y,z)}{\Delta y} +$$
$$+\frac{F_z(x,y,z+\Delta z)-F_z(x,y,z)}{\Delta z}$$

Wir bilden $V\to 0$; $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ und erhalten als Grenzwert die Summe der drei partiellen Ableitungen

Divergenz des Vektorfeldes F:

$$div\,\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \vec{F}\cdot d\vec{A} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Die Divergenz-Operation lässt sich auch mit Hilfe des

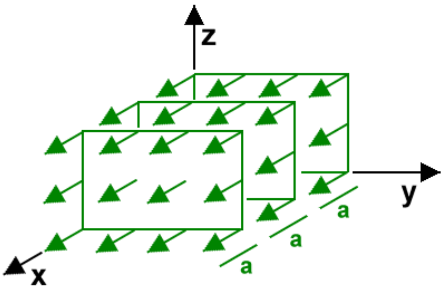
Nabla-Operators $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

als **Skalarprodukt** ausdrücken: $div\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

ausgewählte Beispiele

Beispiel 1: Für homogene Vektorfelder verschwindet die Divergenz.

$$\vec{F}(x,y,z)=(a,b,c)$$



$$div\,\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}(a),\frac{\partial}{\partial y}(b),\frac{\partial}{\partial z}(c)\right)=0$$

Beispiel 2: Das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ hat die Divergenz 3.

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

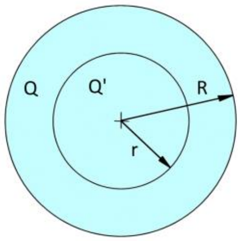
Beispiel 3: Das elektrische Feld einer Kugel mit homogener Ladungsdichte (Gesamtladung Q, Kugelradius R) hat

- außerhalb der Kugeloberfläche die Form (entspricht Punktladung im Zentrum)

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|r|}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

- innerhalb der Kugel wird nur der jeweils eingeschlossene Ladungsteil

wirksam: $$\frac{Q'}{Q}=\frac{(4/3)\pi\cdot r^3}{(4/3)\pi\cdot R^3};\qquad Q'=Q\frac{r^3}{R^3}$$



$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|r|}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot(x,y,z)$$

Außerhalb der Kugel verschwindet die Divergenz des elektrischen Feldes:

$$div\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}\right\}=0$$

Im Kugelinneren gilt

$$div\vec{E}=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{Q}{V\cdot\varepsilon_0}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Bei homogener Ladungsverteilung ist im Innern der Kugel jeder Punkt eine Quelle des elektrischen Feldes.
Außerhalb der Kugeloberfläche ist das elektrische Feld quellen- und senkenfrei.