Lösungsmethoden für Differentialgleichungen 2. Ordnung

Behandlung einer Reihe von Typen der Dgl. 2. Ordnung, für die einfache Lösungsmöglichkeiten existieren bzw. die sich auf Dgl. erster Ordnung zurückführen lassen.

1. Typ   *y"=f(y',x)*   (y kommt nicht vor)

- wird behandelt als Dgl. erster Ordnung der Funktion ***p = y'(x)***

  $\Rightarrow$ *p' = f(p, x)*

  $\Rightarrow$ Dgl. 1. Ordnung $\Rightarrow$ allg. Lösung finden p = p(x, C_1)

  $\Rightarrow$ allg. Lösung der Dgl. 2. Ordnung durch Integration von p

$$\boxed{y = \int p(x, C_1)dx + C_2}$$

Beispiel: $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0 \qquad y' = p(x)$

$$(1+x^2)p' = -2xp$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\ln p = -\ln(1+x^2) + \ln C_1$$

$$y' = \frac{C_1}{1+x^2}$$

$$y = C_1 \arctan x + C_2$$

2. Typ   *y"=f(y',y)*   (x kommt explizit nicht vor)

Trick: Gesucht wird y' als Funktion von y (wobei y Funktion von x ist)

$$y' = p(y(x))$$

$$y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \qquad \text{da} \qquad \frac{dy}{dx} = y' = p$$

$\Rightarrow$ Durch Einsetzen von y' und y" erhält man für p(y)

$$p\frac{dp}{dy} = f(p, y)$$

Das ist eine Dgl. erster Ordnung, allerdings für p(y) mit der allg. Lösung p = p(y, C_1)

Die allg. Lösung der ursprünglichen Dgl. findet man durch Variablentrennung:

$$y' = p(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2}$$

Beispiel: $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$ $\quad$ *r' = p(r)*

$$r^2 + 2p^2 - rpp' = 0$$

$$1 + 2\left(\frac{p}{r}\right)^2 - \left(\frac{p}{r}\right)p' = 0, \qquad \frac{p}{r} = z; \quad p' = rz' + z$$

$$1 + 2z^2 - rzz' - z^2 = 0$$

$$\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dr}{r}$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln r + \ln C_1$$

$$1 + z^2 = C_1^2 r^2$$

$$z^2 = \frac{p^2}{r^2} = C_1^2 r^2 - 1$$

$$p = r' = r\sqrt{C_1^2 r^2 - 1}$$

$$\frac{dr}{r\sqrt{C_1^2 r^2 - 1}} = \frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{C_1^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} = d\varphi$$

$$\arccos\frac{1}{C_1 r} = \varphi + C_2$$

$$r = \frac{1}{C_1\cos(\varphi + C_2)}$$

3. Typ $\quad y'' + f(x)\cdot y' + g(y)\cdot y'^2 = 0$

- wären ***f*** und ***g*** nur Funktionen von x, läge Typ 1 vor.
- wären ***f*** und ***g*** nur Funktionen von y, läge Typ 2 vor.

Es liegt nahe zu untersuchen, ob sich als Lösungsansatz ein Produkt aus einer Fuktion von x und einer Funktion von y verwenden läßt: ***y' = p(x)·q(y)***

Differenziert man den Ansatz ergibt sich:

$$y'' = p'q + pq'y' = p'q + pq'pq = p^2qq' + p'q \qquad p' = \frac{dp}{dx} \qquad q' = \frac{dq}{dy}$$

Eingesetzt erhält man:

$$p^2q\left\{\frac{-p' + f(x)p}{p^2} - q' + g(y)q\right\} = 0$$

p(x) = 0 und ***q(y) = 0*** ergeben die Triviallösung, die nicht weiter beachtet wird.

Die Lösung erhält man mit dem Klammerausdruck gleich Null, d.h. wenn man die Lösungen der beiden Differentialgleichungen einsetzt:

$$p' + f(x)p = 0 \qquad \text{und} \qquad q' + g(y)q = 0$$

Beispiel: $xyy'' + yy' - xy'^2 = 0$ oder $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y'^2}{y} = 0$

Es sind also ***f(x) = 1/x*** und ***g(y) = - 1/y***

Ansatz: ***y' = p(x) q(y)*** → $p' + \frac{p}{x} = 0 \qquad q' - \frac{q}{y} = 0$

Es ergibt sich: $p = \frac{c_1}{x} \qquad q = c_2 y$

$$y' = pq = C_1 \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{y} = C_1 \frac{y}{x}$$

$$\ln y = C_1 \ln x + \ln C_2$$

Lösung: $y = C_2 x^{C_1}$

4. Typ ***a(x)·y” + b(x)·y‘ + c(x)·y = d(x)***

- Dgl. 2. Ordnung
  - homogen, wenn d(x) = 0
  - inhomogen, wenn d(x) $\neq$ 0

1. Im Fall der homogenen Dgl. ist jede Linearkombination zweier Lösungen $\eta_1(x)$ und $\eta_2(x)$ ebenfalls eine Lösung und bei Dgl. zweiter Ordnung ist $C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x)$ die allgemeine Lösung, vorausgesetzt, $\eta_1(x)$ und $\eta_2(x)$ sind linear unabhängig ($\eta_1(x) \neq C\eta_2(x)$).
2. Ist eine Funktion ***u(x) + iv(x)*** Lösung einer homogenen linearen Dgl. mit reellen Koeffizienten so sind auch ***u(x)***, ***v(x)*** und $C_1u(x) + C_2v(x)$ Lösungen der Dgl., sofern ***u(x)*** und ***v(x)*** linear unabhängig sind. $C_1u(x) + C_2v(x)$ ist dann die allgemeine Lösung der Dgl. 2.Ordnung.
3. Die allg. Lösung der **inhomogenen Dgl.** unterscheidet sich von der allg. Lösung der homogenen Dgl. nur durch eine additive Funktion $\varphi(x)$, die selbst partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. ist: $y = C_1u(x) + C_2v(x) + \varphi(x)$
4. Wenn man eine partikuläre Lösung der homogenen Dgl. gefunden hat, kann man mittels **Variation der Konstanten** die allg. Lösung der homogenen und der inhomogenen Dgl. erhalten.

   Beweis: $\eta(x)$ sei Lösung der Dgl. $a\eta'' + b\eta' + c\eta = 0$

   Dann ist auch $C\eta(x)$ eine Lösung.

   Wir arbeiten weiter mit dem Ansatz:

   $$y = C(x)\eta(x); \qquad y' = C'\eta + C\eta'; \qquad y'' = C''\eta + 2C'\eta' + C\eta''$$

   $$a\eta C'' + \{2a\eta' + b\eta\}C' + \{a\eta'' + b\eta' + c\eta\}C = d$$

   Der Klammerausdruck vor *C* ist Null, da η Lösung der homogenen Gleichung ist.

   Es bleibt eine Dgl. Typ1 für die Funktion *C(x)*.

   Durch Substitution ***C‘(x) = p*** ergibt sich eine lineare Dgl. 1. Ordnung.

Als Lösung ergibt sich ein Ausdruck der Gestalt: ***$y = C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x) + \varphi(x)$***

Beispiel: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ eine homogene Lösung: ***$y = x$***

→ $y = C(x)x$; $y' = C'x + C$; $y'' = C''x + 2C'$

$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 C'' = x^3 \sin x$

$C'' = \sin x$ $C = -\sin x + C_1x + C_2$

allgemeine Lösung: ***$y = C_1x^2 + C_2x - x\sin x$***

Nach der Betrachtung der verschiedenen Lösungsvarianten sei abgetrennt noch ein in der Physik wichtiger Fall der Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelt:

Die homogene Schwingungsgleichung ***$ay'' + by' + cy = 0$*** *(a,b,c – konstant)*

Ein Lösungsansatz: $y = e^{\lambda x}$ $y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

ergibt: $\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)\cdot e^{\lambda x} = 0$

Diese Gleichung wird erfüllt einerseits im trivialen Fall x → -∞ (entspricht y → 0), andererseits, wenn der Klammerausdruck Null wird. Wenn man den trivialen Fall ausschließt, führt die Lösung der Differentialgleichung damit auf die Lösung einer quadratischen Gleichung, die in der Regel 2 Lösungen für λ besitzt. Entsprechend gestaltet sich die Lösung der Dgl.:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reell

Dann sind die Lösungen der Dgl. $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$

Die allgemeine Lösung heißt entsprechend Satz 1 (siehe oben Typ 4):

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Dann ist eine der Lösungen $y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\{\cos \beta x + i \sin \beta x\}$.

Die allgemeine Lösung lautet entsprechend Satz 2 (siehe oben Typ 4):

$$y = e^{\alpha x}\{C_1 \cos \beta\, x + C_2 \sin \beta\, x\}$$

3. **$\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a$**

Mit dem Vorliegen dieser Doppellösung läßt sich nicht ohne weiteres auf die allgemeine Lösung schließen. Erst durch Variation der Konstanten kann man diese allgemeine Lösung finden. Entsprechend Satz 4 (siehe oben Typ 4) erfolgt der Lösungsansatz:

$$y = C(x)e^{\lambda x} \qquad y' = (C' + \lambda C)e^{\lambda x} \qquad y'' = (C'' + 2\lambda C' + \lambda^2 C)e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Dgl. findet man C(x):

$$\left\{aC'' + (2a\lambda + b)C' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)C\right\}e^{\lambda x} = 0$$

für λ = -b/2a verschwinden die Klammerausdrücke bei C' und C und es bleibt

C" = 0

Die Lösung dieser Dgl. ist bekanntlich $\boldsymbol{C = C_1 x + C_2}$

womit man im Falle einer Doppelwurzel als allgemeine Lösung der ursprünglichen Dgl. erhalten:

$$y = C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

Beispiel:

$$y'' - y = 0$$

entspricht Fall 1, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reell

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$$

$$\underline{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}}$$

Beispiel:

$$y'' + y = 0$$

entspricht Fall 2, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i \qquad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\underline{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

Beispiel:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

entspricht Fall 3, $\lambda_1 = \lambda_2$ = -b/2a

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\underline{y = C_1 x e^{-x} + C_2 e^{-x}}$$