Lösungsmethoden

Differentialgleichungen erster Ordnung

Für gewisse Typen von Differentialgleichungen läßt sich ein Weg angeben, auf dem man, die Lösung der Differentialgleichung auf Quadraturen d.h. auf das Ausrechnen von Integralen, zurückführen kann.

1. Typ: $y' = f(x) \cdot g(y)$

- Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

- **Ergebnis:** Abhängigkeit y(x) in der impliziten Form G(y) = F(x) + C.

Beispiel: $xy' + y = 0$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\ln y = -\ln x + \ln C$$
$$y = \frac{C}{x}$$

2. Typ: *y' = f(y/x)*

- Substitution z = y/x $\qquad y = xz; \qquad y' = xz' + z$

  die Dgl. heißt dann: $\qquad xz' + z = f(z)$

  Diese Gleichung ist vom Typ 1 und läßt sich durch Variablentrennung lösen:

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

- Aus der Lösung *z = z(x,C)* läßt sich die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen: *y = y(x,C)*

Beispiel: $(x + y)y' + (x - y) = 0$

$$y' = \frac{y - x}{y + x} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} \qquad\qquad xz' + z = \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$\frac{(z + 1)}{z^2 + 1} dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(z^2 + 1) + \arctan z = -\ln x + \ln C \qquad\qquad \sqrt{x^2 + y^2} = C\exp(-\arctan\frac{y}{x})$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so bekommt die allgemeine Lösung die Form: $r = Ce^{-\varphi}$

Das sind als Graphik betrachtet logarithmische Spiralen.

3. Typ: Die lineare Differentialgleichung *a(x) y´ + b(x) y = c(x)*

- **„lineare Dgl.“** heißt: y(x) als auch y', y" usw. liegen im ersten Grad vor,
  Produkte dieser Größen (etwa yy') kommen nicht vor.
- **"homogene Dgl."** heißt: das von y und y´ freie "Störungsglied" c(x) fehlt;
  mit c(x) heißt die Dgl. „inhomogen“.
  !! nur bei linearen Differentialgleichungen wird homogenen und inhomogenen unterschieden **!!**
- **Lösung:**
  - Streichung des "Störungsgliedes" c(x)
  - die nun homogene Gleichung durch Trennung der Variablen lösen

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

$$y = C\eta(x) \qquad \text{mit} \qquad \eta(x) = \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

- durch Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Gleichung finden.

Lösungsansatz - Variation der Konstanten

$$y = C(x)\eta(x), \qquad y' = C'\eta(x) + C\eta'(x)$$

C(x)·η(x) sollte dann Lösung der Dgl. sein; wir suchen den unbekannten Teil: *C(x)*

Eingesetzt erhält man:

$$a(x)\{C'\eta(x) + C\eta'(x)\} + b(x)C\eta(x) = c(x)$$

$$a(x)\eta(x)C' + \{a(x)\eta' + b(x)\eta\}C = c(x)$$

Da *η(x)* eine Lösung der homogenen Gleichung ist, so verschwindet der Klammerausdruck:

$$a(x)\eta(x)C' = c(x)$$

$$C' = \frac{c(x)}{a(x)\eta(x)}$$

$$C = \int \frac{c(x)}{a(x)\eta(x)}dx + C_1$$

Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$\boxed{y = C_1\eta(x) + \eta(x)\int \frac{c(x)dx}{a(x)\eta(x)}}$$

Zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung tritt also noch eine Funktion hinzu, die ihrerseits eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Beispiel: $xy' - y = x^2 \cos x$

Lösung: Verstümmeln: $xy' - y = 0$

Trennung der Variablen! $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ → ***$y=Cx$***

Variation der Konstanten: $y = C(x)\, x$ $y' = C'x + C$

Einsetzen: $x\,(C'x + C) - Cx = x^2 \cos x$

$C' = \cos x$

$C = \sin x + C_1$

Demnach allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = (C_1 + \sin x)\, x}$

4.Typ: Dgl. nach Bernoulli $a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)\, y^n$

- **Dgl. von Bernoulli** läßt sich auf die lineare Dgl. zurückführen.
- Division durch y^n: $$a(x)\frac{y'}{y^n} + b(x)\frac{y}{y^n} = c(x)$$

neue Veränderliche: $$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$$

es ergibt sich: $$y = z^{\frac{1}{1-n}} \qquad y' = \frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z' \qquad \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$$

und die Differentialgleichung bekommt die Form:

$$\frac{a(x)}{1-n} z' + b(x) z = c(x)$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für die Funktion z(x).

Ihre Lösung sei $\boldsymbol{z = \varphi(x) + C\zeta(x)}$.

Die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung ist dann:

$$\boxed{y = \{\varphi(x) + C\zeta(x)\}^{\frac{1}{1-n}}}$$

Beispiel: $$xy' + 2y - xy^2 = 0$$

Umformen: $$\frac{xy'}{y^2} + \frac{2}{y} = x$$

Substitution: $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{z'}{z^2}$ und somit $-xz' + 2z = x$

Verstümmeln, homogen lösen: $z = Cx^2$

Variation des Koeffizienten: $z = C(x) \cdot x^2$ $\quad z' = C' \cdot x^2 + C \cdot 2x$

$$-x(C' \cdot x^2 + C \cdot 2x) + 2C \cdot x^2 = x$$

$$-C' \cdot x^3 = x$$

$$C = \frac{1}{x} + C_1$$

$$z = x + C_1 \cdot x^2 = x(1 + C_1 x)$$

$$y = \frac{1}{x(1 + C_1 x)}$$

Hinweis:

Lösungsmöglichkeit auch mit 2 aufeinander folgenden Substitutionen: $z = \frac{y}{x}$ und $u = \frac{z}{x}$

5.Typ: Clairautsche Differentialgleichung $y = x\,y' + f(y')$

- besonders einfach zu lösen, obgleich $f(y')$ beliebig komplizierte Funktion von y' sein kann.

- Ersetzt man y' durch C, so hat man bereits die allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y = Cx + f(C)}$

Dies ist eine einparametrige Geradenschar. Die Einhüllende dieser Schar, sofern eine solche existiert, ist eine singuläre Lösung der Differentialgleichung. Man findet sie, wie wir früher sahen, indem man die allgemeine Lösung partiell nach C (bzw. die Differentialgleichung nach y') differenziert und aus beiden Gleichungen den Parameter C (bzw. y') eliminiert.

Beispiel: $(x^2-1)y'^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0$

Wenn man die Dgl. anders schreibt, erkennt man sie als Clairautsche Dgl.:

$$(xy' - y)^2 = 1 + y'^2$$

$$xy' - y = \sqrt{1 + y'^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$Cx - y = \sqrt{1 + C^2}$$

Das ist die Gleichung aller Tangenten an den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, die, wenn man die freie Konstante C durch $-\cot\alpha$ ersetzt, in die Hessesche Normalform $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$ übergeht. Der Einheitskreis selbst ist eine singuläre Lösung der Differentialgleichung.

6. Typ: Dgl. von Jacobi

$$y' = \frac{(Ax + By)y + \alpha x + \beta y}{(Ax + By)x + a x + b y}$$

- Diese Differentialgleichung von Jacobi läßt sich durch geeignete hintereinander auszuführende Substitutionen immer **in eine Bernoullische Differentialgleichung überführen**.
- man dividiert Zähler und Nenner durch x, substituiert z = y/x:

$$y' = \frac{\left(A + B\frac{y}{x}\right)y + \alpha + \beta\frac{y}{x}}{\left(A + B\frac{y}{x}\right)x + a + b\frac{y}{x}} \qquad \text{mit} \qquad y = xz, \quad y' = xz' + z$$

folgt $\quad xz' + z = \dfrac{(A + Bz)xz + \alpha + \beta z}{(A + Bz)x + a + bz} \qquad xz' = \dfrac{\alpha + (\beta - a)z - bz^2}{(A + Bz)x + a + bz}$

Günstigerweise sucht man x als Funktion von z (leichter als umgekehrt) mit: $z' = \dfrac{1}{x'}$

$$\boxed{x' = \frac{(A + Bz)x^2 + (a + bz)x}{\alpha + (\beta - a)z - bz^2}}$$

Dies ist eine Differentialgleichung vom Typ 4 für die Funktion x(z).

Beispiel: $\quad y' = \dfrac{(x - y)y - x - y}{(x - y)x + x + y}$

Mit y = xz wird $\quad xz' + z = \dfrac{(1 - z)xz - 1 - z}{(1 - z)x + 1 + z} \qquad xz' = -\dfrac{1 + 2z + z^2}{(1 - z)x + 1 + z}$

Mit z' = 1/x´ $\quad x' = -\dfrac{(1 - z)x^2 + (1 + z)x}{(1 + z)^2}$

$$(1 + z)^2 x' + (1 + z)x + (1 - z)x^2 = 0$$

(Bernoulli)

$$(1 + z)^2 \frac{x'}{x^2} + (1 + z)\frac{1}{x} + (1 - z) = 0$$

Mit **u = 1/x** und **u´= -x´/x²** wird

$$(1 + z)^2 u' - (1 + z)u = 1 - z$$

inhomogene Dgl. – homogen lösen!

$$\frac{du}{u} = \frac{dz}{1 + z}$$

Lösung: $\quad u = C(1 + z)$

Variation der Konstanten usw. Ergebnis: $\quad y = -x - c(x - 1) + \sqrt{c^2 (x - 1)^2 + 2cx^2}$

7. Typ: Dgl. von Riccati *a(x) y´ + b(x) y + c(x) y² = f(x)*

- Unterschied zu Dgl. von Bernoulli: Glied der rechten Seite
- läßt sich auf eine Bernoullische Dgl. zurückführen,
  wenn es gelingt, eine partikuläre Lösung ***y = η(x)*** zu finden.
- **Ansatz:** ***y = η(x) + z(x)***
  Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$a(x)z' + \left(b(x) + 2c(x)\eta\right)z + c(x)z^2 + \left\{a(x)\eta' + b(x)\eta + c(x)\eta^2\right\} = f(x)$$

Da ***η(x)*** als Lösung der vorgelegten Differentialgleichung vorausgesetzt wurde, ist der Ausdruck in der geschwungenen Klammer gleich ***f(x)*** und es bleibt für die unbekannte Funktion ***z(x)*** die Differentialgleichung:

$$a(x)z' + \left(b(x) + 2c(x)\eta\right)z + c(x)z^2 = 0$$

Das ist eine **Bernoullische Differentialgleichung**, die man durch den Ansatz: ***z = 1/u*** auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen und lösen kann.

Beispiel: $$x(x-1)y' - (1+2x)y + y^2 + 2x = 0$$

Man erkennt leicht, daß ***y =1*** eine Lösung ist. Wir machen daher den Ansatz: **y = 1 + z** und bekommen

$$x(x-1)z' - (1+2x)(1+z) + (1+z)^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)z' + (1-2x)z + z^2 = 0$$

mit **z=1/u** : $-x(x-1)u' + (1-2x)u + 1 = 0$

Allgemeine Lösung: $u = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{C}{x(x-1)}$

Somit: $z = \dfrac{x(x-1)}{x+C}$ und $y = 1 + \dfrac{x(x-1)}{x+C} = \dfrac{x^2 + C}{x+C}$

Dies ist die allgemeine Lösung der vorgelegten Riccatischen Differentialgleichung.
Da die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung die Form

$$u = \varphi(x) + C\psi(x)$$

hat, so hat die Bernoullische Differentialgleichung der vorliegenden Art die Lösung

$$z = \frac{1}{\varphi(x) + C\psi(x)}$$

und demnach hat die Riccatische Differentialgleichung stets eine allgemeine Lösung der Form:

$$y = \eta(x) + \frac{1}{\varphi(x) + C\psi(x)}$$ oder anders geschrieben $$y = \frac{\Phi(x) + C\Psi(x)}{\varphi(x) + C\psi(x)}$$

Die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung ist gebrochen in C.