Lösungsmethoden gewöhnlicher Differentialgleichungen (Dgl.)

Allgemeine und partikuläre Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung!

Zum Unterschied von den „gewöhnlichen“ Gleichungen sind aber **die gesuchten Unbekannten** nicht spezielle Zahlenwerte, welche die Gleichung zur Identität machen, sondern **Funktionen**, und zwar Funktionen von einer Veränderlichen bei den **gewöhnlichen Differentialgleichungen** und Funktionen von mehreren Veränderlichen bei den **partiellen Differentialgleichungen**.

gewöhnlichen Dgl. n-ter Ordnung**:** $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.

Beispiele:

$x^2 \cdot y'' = y$ - gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung (höchste Ableitung),
- lineare Dgl. (Funktion und Ableitungen nur in erster Potenz und auch nicht miteinander multipliziert)

$y \cdot y' = x$ - Dgl. erster Ordnung, aber nicht linear.

Lösung („Integral“) der Dgl. ist <u>jede</u> Funktion $y(x)$, die in die Dgl. eingesetzt, diese zu einer Identität macht.

So ist $y = e^x$ eine Lösung der Dgl. $y' = y$, aber auch $y = e^{x+2}$ und $y = 3e^x$ sind Lösungen.

Alle Lösungen der Dgl. $y' = y$ kann man hier zusammenfassen in der Form: $y = Ce^x$
(C – Konstante).

Die einparametrige Funktionenschar $y = Ce^x$ ist die **„allgemeine Lösung“** der Dgl.

Eine einzelne Funktion dieser Schar (z.B. $y = e^x$ oder) heißt **„partikuläre Lösung“.**

Das Finden der allgemeinen Lösung einer Dgl. bezeichnet man als deren **„Integration“**.
Denkt man an ein Integral im ursprünglichen Sinne, so spricht man von **„Quadratur“**.

Wir betrachten eine Differentialgleichung als gelöst, wenn wir die Lösung auf Quadraturen, d.h. auf das Ausrechnen von Integralen, zurückgeführt haben.

So ist die Dgl. $y' = f(x)$ auf eine Quadratur zurückgeführt, wenn man statt ihrer schreibt
$y = \int f(x)dx + C$.

Die Integrationskonstante pflegt man bei der Lösung von Dgl. ausdrücklich hinzuschreiben, um deren Rolle zu unterstreichen

Die **allgemeine Lösung** jeder Differentialgleichung erster Ordnung ist eine **einparametrige Kurvenschar** oder, analytisch gesprochen, Funktionenschar. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung gilt etwas Entsprechendes.

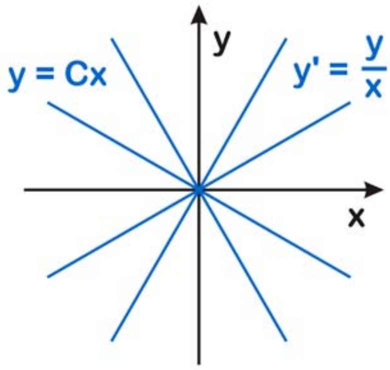
Es gilt der allgemeine **Satz:**
Jede n-parametrige Funktionenschar (Kurvenschar) lässt sich durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung analytisch wiedergeben, und umgekehrt lässt sich jede Differentialgleichung n-ter Ordnung durch eine n-parametrige Kurvenschar geometrisch deuten.

- algebraische Gleichungen höheren Grades können mehrere reelle Lösungen haben,
- Differentialgleichungen höheren Grades (mit höheren Ableitungen) können mehrdeutige Lösungen haben, z. B. zwei einparametrige Kurvenscharen statt nur einer.

Wie kommt man von der Gleichung einer **Kurvenschar** zu ihrer **Differentialgleichung**?

Aufstellung der Differentialgleichung:
Für jede Kurve der **einparametrigen** Schar $y = \varphi(x, C)$ gilt $y' = \varphi'(x, C)$.
Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen den freien Parameter C, so bekommt man eine Beziehung zwischen y', y und x; sie heiße $F(x, y, y') = 0$.
Dies ist die Differentialgleichung erster Ordnung der Kurvenschar $y = \varphi(x, C)$.

Beispiel: *Die Schar der Geraden durch den Nullpunkt hat die Gleichung:* $y = Cx$. *Differentiation nach* x *ergibt* $y' = C$.
Die Eliminierung des Parameters C *aus diesen beiden Gleichungen liefert die gesuchte Differentialgleichung* $y' = y/x$ *oder in impliziter Form geschrieben* $xy' - y = 0$.



Bei einer **zweiparametrigen Kurvenschar** $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ muss man außer der ersten Ableitung $y' = \varphi'(x, C_1, C_2)$ auch noch die zweite Ableitung $y'' = \varphi''(x, C_1, C_2)$ nach x bilden, um die beiden Konstanten C_1 und C_2 eliminieren zu können; das Ergebnis ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, y', y'') = 0$.
Man sieht: eine n-parametrige Kurvenschar führt auf eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Beispiel: *zweiparametrige Kurvenschar: alle Geraden der Ebene* $y = C_1 x + C_2$.

Zweimaliges Ableiten nach x *ergibt* $y' = C_1$ *und* $y'' = 0$. *Hier enthält die letzte Gleichung keinen der beiden Parameter mehr; wir müssen keinen Parameter mehr eliminieren.*

$y'' = 0$ *ist die Differentialgleichung der Geraden der* xy *-Ebene.*

Beispiel: *Differentialgleichung der zweiparametrigen Schar aller Kreise vom Radius* a.

Die Krümmung einer Kurve beträgt, $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. *Kreise vom Radius* a *haben eine konstante Krümmung* $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$, *d.h. für sie gilt* $ay''^2 = (1+y'^2)^3$.

Die Differentialgleichung aller Kreise der Ebene könnte man hieraus finden, indem man diese Gleichung nach x *differenziert und dann aus beiden Gleichungen den Parameter* a *eliminiert. Die Differentialgleichung der* ∞^3 *Kreise der Ebene ist dann dritter Ordnung:* $(1+y'^2)y''' = 3y'y''^2$.

Es kann gezeigt werden, dass auch die <u>Umkehrung</u> gilt - dass einer Differentialgleichung n-ter Ordnung eine ganz bestimmte n-parametrige Kurvenschar zugeordnet ist.

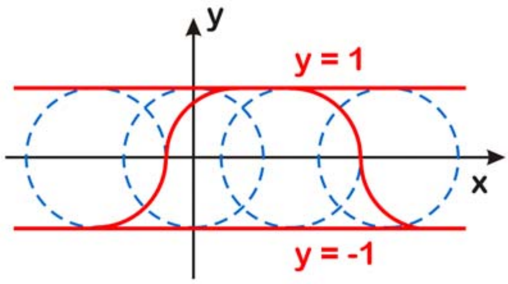
2. Singuläre Lösungen

Es kann vorkommen, dass es neben der n-parametrigen Schar von Kurven, die wir „**allgemeine Lösung der Differentialgleichung**" genannt haben, noch andere Kurven gibt, die von der allgemeinen Lösung nicht erfasst werden, die aber dennoch Punkt für Punkt der Differentialgleichung genügen. Das sind dann natürlich auch Lösungen der Differentialgleichung.
Solche Lösungen werden „**singuläre Lösungen**" genannt.

Beispiel: *Die Kurvenschar aller Kreise mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse und dem Radius 1 lässt sich ausdrücken durch:* $(x + C_1)^2 + y^2 = 1$.

Implizit abgeleitet ergibt das $2(x + C_1) + 2yy' = 0$

bzw. $(x + C_1) + yy' = 0$.



Aus der Kreisgleichung folgt: $(x + C_1) = \pm\sqrt{1-y^2}$ *und damit* $yy' = \mp\sqrt{1-y^2}$ *bzw.*

$y^2 y'^2 = 1 - y^2$ *und* $y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0$. *Diese Differentialgleichung steht also für die Schar aller Kreise mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse und dem Radius 1.*

Ein Blick auf die Abb. zeigt, dass außer den Kreisen auch die sie berührenden Geraden $y=1$ und $y=-1$ Lösungen der Dgl. sind, was man durch Einsetzen bestätigen kann.
Diese Geraden sind in der Kreisschar nicht enthalten - es sind singuläre Lösungen.
Eine genauere Betrachtung zeigt, dass nicht nur die Kreise und die sie einhüllenden Geraden Lösungen der Dgl. sind, sondern auch noch viele zusammengesetzte Kurven, die auf das Richtungsfeld passen (siehe Abb.).

- Ist die n-parametrige Kurvenschar, die wir als allgemeine Lösung bezeichneten, also keine geometrischer Repräsentation der Differentialgleichung n-ter Ordnung?
  Denn es gibt ja offensichtlich auch andere Lösungen, als die hier enthaltenen!
- Das ist richtig, solange man in jener Kurvenschar nur die Gesamtheit der ∞^{n+1} ausgezogenen Kurven sieht und nicht ein „Feld“ von ∞^{n+1} Linienelementen, aus denen diese Kurven bestehen. Als „Feld“ gesehen bedeutet die „allgemeine“ Lösung die „vollständige“ Lösung der Differentialgleichung, als Kurvenschar gesehen, dagegen nicht.
- Alle Lösungskurven einschließlich der singulären, sind im Linien-Feld wirklich vorhanden, „passen auf das Feld“, und jede Kurve, die sich aus den Elementen dieses Feldes natürlich zusammenfügt oder künstlich zusammensetzen lässt, ist eine Lösung (partikuläre oder singuläre) der Differentialgleichung.
- In diesem Sinne ist die vollständige Lösung
  - einer Differentialgleichung erster Ordnung ein Feld von ∞^2 Richtungselementen
  - einer Differentialgleichung 2-ter Ordnung ein Feld von ∞^3 Krümmungselementen.

Differentialgleichung erster Ordnung:
Liegt explizit vor: $y' = f(x,y)$,
$f(x,y)$ ist im interessierenden Gebiet eindeutig und beliebig oft differenzierbar
$y = y(x)$ ist dann Lösung der Dgl., wenn gilt:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y''(x) = f_x + f_y y',$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y''$$

usw.
Das bedeutet: Wenn man für irgendeinen x-Wert, sagen wir für $x=0$, den zugehörigen Funktionswert vorschreibt, $y(0)=y_0$ so ist durch die Differentialgleichung zunächst $y'(0)$ und durch die aus ihr abgeleiteten Identitäten weiter auch $y''(0), y'''(0)$ usw. festgelegt, so dass durch den einen Parameter y_0 die Lösung der Differentialgleichung in Form ihrer Taylorschen Reihe vollständig bestimmt

ist, vorausgesetzt, dass es eine analytische Kurve $y = y(x)$ gibt, die durch den Punkt $(0, y_0)$ hindurch läuft und Lösung der Differentialgleichung ist. Diese Lösung heißt dann

$$y(x) = y_0 + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(0) + \cdots$$

worin

$$y'(0) = f(0, y_0)$$
$$y''(0) = f_x(0, y_0) + f_y(0, y_0) y'(0)$$
$$y'''(0) = f_{xx}(0, y_0) + \cdots$$

Die Differentialgleichungen sind als Identitäten anzusehen und dürfen daher nach der unabhängigen Veränderlichen differenziert werden!
y bedeutet eine Funktion von x, die gesuchte Funktion, die aus der Differentialgleichung eine Identität in x macht, wenn man sie anstelle von y dort einsetzt.