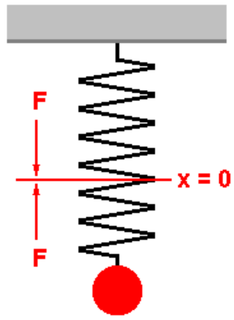
Die Schwingungs-Differentialgleichung

Freie ungedämpfte Schwingung eines Massenpunktes (Federschwinger)



- Bei Auslenkung des Massenpunktes: Hookesches Gesetz

  $F = -k_0 x$ $\qquad k_0$ - Federkonstante

- Die Bewegungsgleichung lautet daher:

$$ma = -k_0 x \qquad \text{oder} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_0 x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0^2 = \frac{k_0}{m}$$

- Als Lösungsansatz verwendet man $x = C \cdot \exp(\lambda t)$

- Eingesetzt ergibt das $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ und damit $\lambda_{1/2} = \pm i \cdot \omega_0$.
  Damit erhält man die beiden Lösungen $x_1(t) = C_1 \exp(i\omega_0 t); \quad x_2(t) = C_2 \exp(-i\omega_0 t)$,
  die für $\omega_0 \neq 0$ linear unabhängig sind.

- Die allgemeine Lösung der DGL ist dann eine Linearkombination beider Lösungen:

$$x(t) = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t)$$

- Da $x(t)$ eine **reelle Funktion sein muss,** muss für die komplexen Konstanten gelten:

$$C_1 = C_2^* = C$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = C \exp(i\omega_0 t) + C^* \exp(-i\omega_0 t)$$

- Setzt man für die komplexen Konstanten $C = a + bi$, $\ C^* = a - bi$
  und verwendet die Eulersche Formel:

$$\exp(i\omega_0 t) = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t \qquad \text{bzw.}$$
$$\exp(-i\omega_0 t) = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t$$

$\Rightarrow$ so ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$x(t) = 2a \cos \omega_0 t - 2b \sin \omega_0 t \qquad \text{oder mit } C_1 = 2a; \ C_2 = -2b$$
$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

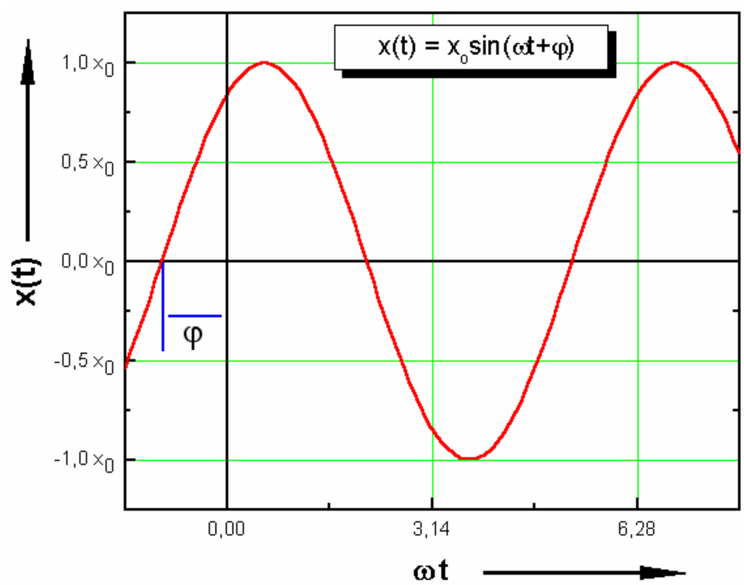
❖ Unter Kenntnis des Additionstheorems

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

lässt sich C_1 auffassen als $x_0 \cdot \sin\varphi$ und C_2 als $x_0 \cdot \cos\varphi$

❖ Damit ergibt sich:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$



Freie gedämpfte Schwingung eines Massenpunktes

- Als Ausgangspunkt unsere Betrachtungen möge der eben behandelte Federschwinger dienen – dieses mal aber bedämpft durch eine Kraft, die wir proportional zur jeweiligen Geschwindigkeit annehmen wollen.

- Ein solcher Fall liegt z.B. bei einer laminaren Umströmung des schwingenden Körpers in einem Medium vor.

- Die Bewegungsgleichung lautet jetzt:

$$ma = -k_0 x - \beta \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + k_0 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k_0}{m}x = 0$$ mit $\frac{\beta}{m} = 2k$ und $\frac{k_0}{m} = \omega_0^2$

$$\ddot{x} + 2k \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

- im Falle von $k \geq 0$ und $\omega_0^2 > 0$ wählen wir einen Lösungsansatz:

$$x = C \cdot \exp(\lambda t)$$

- eingesetzt ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0$$ mit der Lösung $$\lambda_{1/2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$$

Daraus erwächst die Notwendigkeit der Unterscheidung verschiedener Fälle:

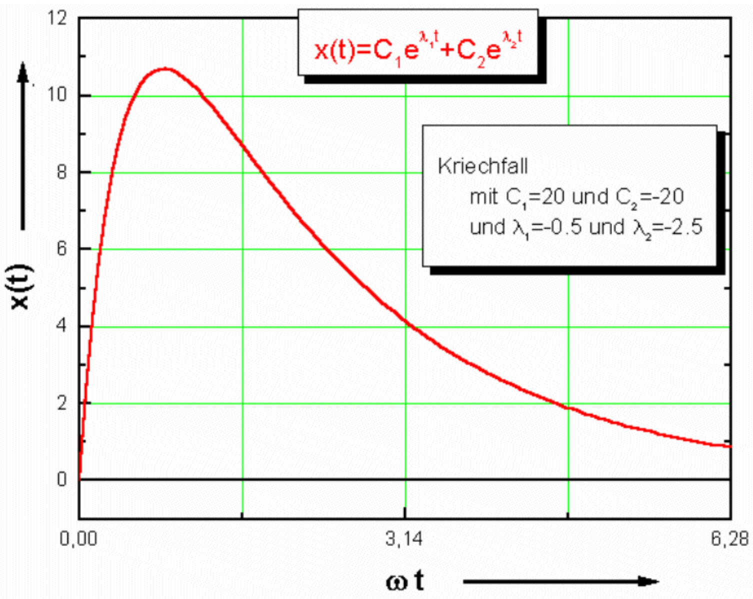
1. Fall:

$k > \omega_0$, d.h. starke Dämpfung, **Kriechfall**

$\Rightarrow$ λ_1, λ_2 sind reell, negativ und voneinander verschieden

Als Lösung ergibt sich damit:

$$\boxed{x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)}$$



2. Fall:

$k = \omega_0$, d.h. starke Dämpfung,

aperiodischer Grenzfall

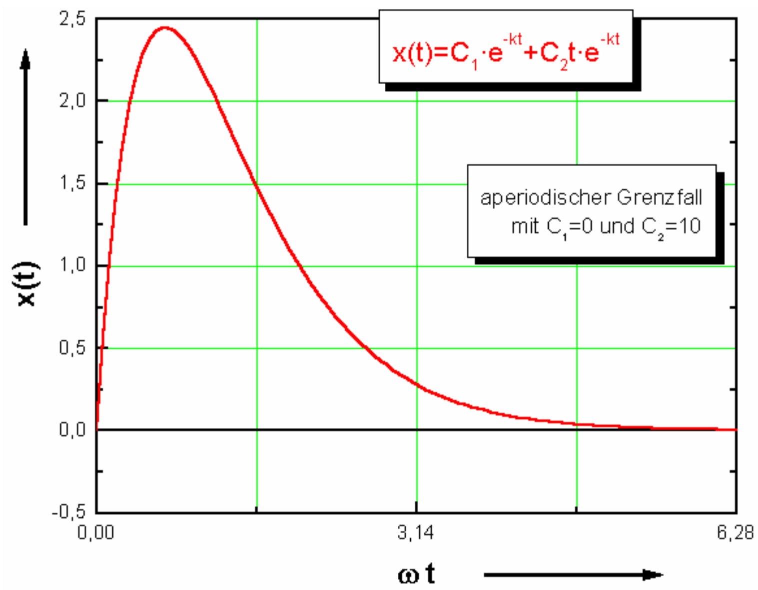
$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -k < 0$

Als Lösung ergibt sich damit:

$$\boxed{x(t) = C_1 \exp(-kt) + C_2 \cdot t \cdot \exp(-kt)}$$

- Bewegungsablauf wie im Fall 1

- schwingungsfähige Systeme kommen in diesem Fall am schnellsten zur Ruhe
  ⇨ Einschwingverhalten von Messgeräten / Zeigerinstrumenten



3. Fall:

$k < \omega_0$, d.h. schwache Dämpfung,

Schwingfall

$\lambda_{1/2}$ sind konjugiert komplexe Wurzeln

$\Rightarrow \qquad \lambda_{1/2} = -k \pm \omega_1 i \qquad$ mit $\qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$

Als Lösung ergibt sich damit:

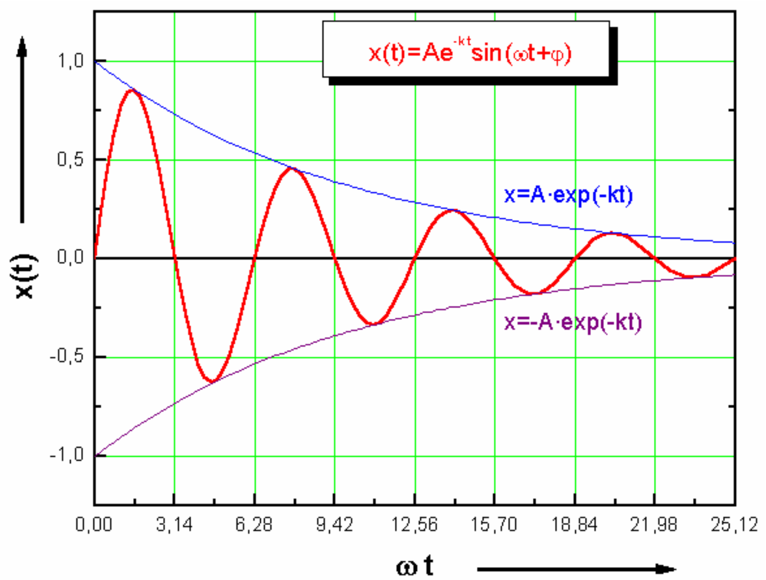
$$x(t) = e^{-kt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$$

oder ähnlich der Behandlung freier Schwingungen - mittels Additionstheorem umgeformt,

$$\boxed{x(t) = A \cdot e^{-kt} \sin(\omega_1 t + \varphi)} \qquad \text{mit} \qquad A^2 = C_1^2 + C_2^2 \text{ ,} \qquad \tan \varphi = \frac{C_1}{C_2}$$

- gedämpfte harmonische Schwingung
- (kein periodischer Vorgang!)
- $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ zeigt, dass im Falle der gedämpften Schwingung die Kreisfrequenz ω_1 kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 der freien Schwingung ist (es folgt $T > T_0$).
- charakterisiert wird das Verhalten der gedämpften Schwingung durch das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender, gleichgerichterer Amplituden:

  $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = e^{kT} \qquad$ mit $\qquad kT = \Lambda$ - logarithmisches Dekrement



Erzwungene Schwingung

- Wir greifen wieder auf unseren Federschwinger zurück, betrachten ihn bedämpft und unter der Wirkung einer periodisch anregenden Kraft $F = ma_0 \cdot \cos \omega t$ (Anregungsfrequenz ω) stehend.

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cdot \cos \omega t$$

- Zur Lösung verfahren wir, wie gelernt:
  - „verstümmeln“ der inhomogenen Gleichung
  - lösen der homogenen Gleichung
  - ergänzen der Lösung durch eine partikuläre Lösung

  $\Rightarrow$ **allgemeine Lösung**

- Die homogene Differentialgleichung $\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ wurde im Kapitel zur freien, gedämpften Schwingung behandelt. Für geringe Dämpfung (Schwingfall) ergab sich die Lösung, die wir hier für den homogenen Teil nutzen:

$$x_{\mathrm{hom}} = A \cdot e^{-kt} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad \text{mit} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$$

- Zu bestimmen bleibt nun noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, um die allgemeine Lösung zu gewinnen.
  Als Ausgangspunkt dafür nutzen wir eine experimentelle Beobachtung: Das System schwingt demnach immer mit der Erregerfrequenz (hier ω), die Eigenfrequenz des Systems (ω_1) spielt keine Rolle!

⇨ Daher wählen wir den Lösungsansatz in einer Form $x_{part} = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t$

- Einfacher gestaltet sich die Rechnung jedoch, wenn wir einen „Umweg“ über einen komplexen Ansatz wählen.
  Wegen $a_0 \cdot \cos \omega t = \mathrm{Re}(a_0 \cdot e^{i\omega t})$ wählen wir $x_{part} = C \cdot e^{i\omega t}$.

- Damit ergibt sich der komplexe Ansatz:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{und mit dem Lösungsansatz}$$

$$-\omega^2 C e^{i\omega t} + 2ki\omega C e^{i\omega t} + \omega_0^2 C e^{i\omega t} = a_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$C(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega) = a_0$$

- Zur Analyse des Ausdrucks unterscheidet man 2 Fälle – Klammerausdruck gleich oder ungleich Null.

1. Fall: $\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega \neq 0$

d.h. Realteil $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ und/oder Imaginärteil $2ik\omega \neq 0$

❖ $C = \dfrac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ki\omega}$ erweitern (kojugiert komplex multiplizieren)

⇨ $C = \dfrac{a_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} - i\dfrac{2k\omega a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}$

$$\mathrm{Re}(C \cdot e^{i\omega t}) = \frac{a_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cdot \cos\omega t + \frac{2k\omega a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cdot \sin\omega t$$

❖ Unser Bemühen, eine weitere Vereinfachung auf ähnliche Weise, wie im Falle der freien ungedämpften Schwingung mittels des Additionstheorems

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

vorzunehmen funktioniert, wenn wir einen Faktor

$$\frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

ausklammern. Erst dann lässt sich die für die Winkelfunktionen notwendige Bedingung:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erfüllen.

⇨ $\mathrm{Re}(C \cdot e^{i\omega t}) = \dfrac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}(\cos\alpha \cdot \cos\omega t - \sin\alpha \cdot \sin\omega t)$

mit

$$\cos\alpha = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

$$\sin\alpha = -\frac{2k\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{Re}(C \cdot e^{i\omega t}) = x_{part} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

mit $\tan\alpha = -\dfrac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Damit ergibt sich für die Lösungsgesamtheit die allgemeine Lösung

$x = x_{\mathrm{hom}} + x_{part}$

$$\boxed{x = A \cdot e^{-kt}\sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}\cos(\omega t + \alpha)}$$

Für große Zeiten strebt der Anteil der homogenen Lösung gegen Null.

Das bedeutet: im stationären Zustand wird das Verhalten des Systems durch die partikuläre Lösung bestimmt.

2. Fall: $\omega_0^2 = \omega^2$; $k = 0$ **Resonanz**

❖ Wegen des Anwachsens der Amplitude versucht man einen partikulären Ansatz mit linearem Zuwachs:

$$x_{part} = C \cdot t \cdot e^{i\omega_0 t}$$

❖ nach Einsetzen folgt:

$$2Ci\omega_0 = a_0 \quad ; \qquad C = -\frac{a_0}{2\omega_0} i$$

$$\Rightarrow \qquad x_{part} = \mathrm{Re}(C \cdot t \cdot e^{i\omega_0 t}) = \frac{a_0}{2\omega_0} t \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Damit ergibt sich die Lösungsgesamtheit (allgemeine Lösung):

$$\boxed{x = \frac{a_0}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}$$

Hier sorgt der partikuläre Lösungsanteil für die großen Ausschläge, die man im Resonanzfall erwarten sollte (x wächst für $t \to \infty$).