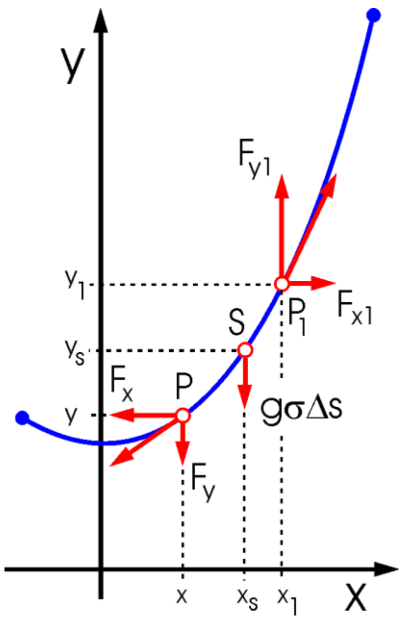
Beispiel: Kettenlinie - cosh x



Die Kettenlinie stellt die Kurve des Gleichgewichts einer homogenen schweren dünnen Kette dar.

Ein kleines Stück PP_1 habe die Länge Δs und die Masse $\sigma\Delta s$.

Der Schwerpunkt liege bei (x_s, y_s).

Gleichgewicht herrscht genau dann, wenn die Summe aller Kräfte und aller Drehmomente auf den Bogen PP_1 gleich 0 ist, betrachtet für den Grenzfall $P_1 \to P$.

Als Kräfte wirken die Seilspannkräfte an den Enden des Bogens, die jeweils in ihre x- und y-Komponenten zerfallen sowie die im Schwerpunkt angreifende Schwerkraft (siehe Abb.).

Damit lauten die Geichgewichtsbedingungen:

$$F_{x1} - F_x = 0 \qquad \text{(Kräfte, x-Komponente)}$$

$$F_{y1} - F_y - g\sigma\Delta s = 0 \qquad \text{(Kräfte, y-Komponente)}$$

$$(y_1 - y)F_x - (x_1 - x)F_y + (x_1 - x_s)g\sigma\Delta s = 0 \qquad \text{(Drehmomente, Drehpunkt } P_1\text{)}$$

- die 3 Gleichungen werden durch $(x_1 - x)$ dividiert.

- danach wird der Grenzübergang $x_1 \to x$ vollzogen.

dadurch ergeben sich die Beziehungen:

1. $\dfrac{dF_x}{dx} = 0$ - die waagerechte Spannungskomponente ist konstant.
2. $\dfrac{dF_y}{dx} = g\sigma\dfrac{ds}{dx}$ - die lotrechte Spannungskomponente ändert sich mit der Bogenlänge s.
3. $F_x\dfrac{dy}{dx} = F_y$ - die Richtung der Gesamtspannung fällt mit der Tangente zusammen.

Durch Umstellen und Berücksichtigung von Gleichung 1. ergibt sich:

$$\frac{dF_y}{dx} = F_x\frac{d^2y}{dx^2} = g\sigma\frac{ds}{dx} \quad ⇨ \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g\sigma}{F_x}\cdot\frac{ds}{dx}$$

wegen $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ und damit $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$ ergibt sich:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g\sigma}{F_x}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}$$

Um die Lösung des Problems voranzutreiben substituiert man : $\frac{dy}{dx}=p$

Es folgt: $\frac{dp}{dx}=\frac{g\sigma}{F_x}\sqrt{p^2+1}$ und nach Variablentrennung: $\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{g\sigma}{F_x}dx$

Das bekannte und grundlegende Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=ar\sinh x+C$ liefert die Lösung:

$$ar\sinh p=\frac{g\sigma}{F_x}\Delta x \qquad \Rightarrow \qquad p=\sinh\left(\frac{g\sigma}{F_x}\cdot\Delta x\right)$$

die Rücksubstitution ergibt:

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\left(\frac{g\sigma}{F_x}\cdot\Delta x\right) \qquad \Rightarrow \qquad dy=\sinh\left(\frac{g\sigma}{F_x}\cdot\Delta x\right)dx$$

Als Endergebnis erhalten wir bei entsprechenden Anfangsbedingungen:

$$\Delta y=\frac{F_x}{g\sigma}\cosh\left(\frac{g\sigma}{F_x}\cdot\Delta x\right)$$ oder

$$\boxed{y=\frac{F_x}{g\sigma}\cosh\left(\frac{g\sigma}{F_x}\cdot x\right)}$$ - die Kettenlinie.